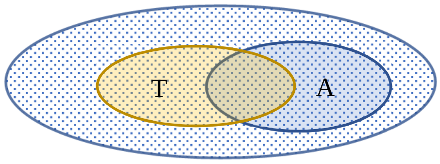
Polynésie septembre 2017 CORRECTION

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

1. *a.* A la calculette : $P(T \geq 140) = 0{,}8944$

b. $P(10 \leq X \leq 70) = 0{,}8710$

c. Soit les événements : T : « le visiteur a la taille exigée », A : « le visiteur a l'âge requis ».



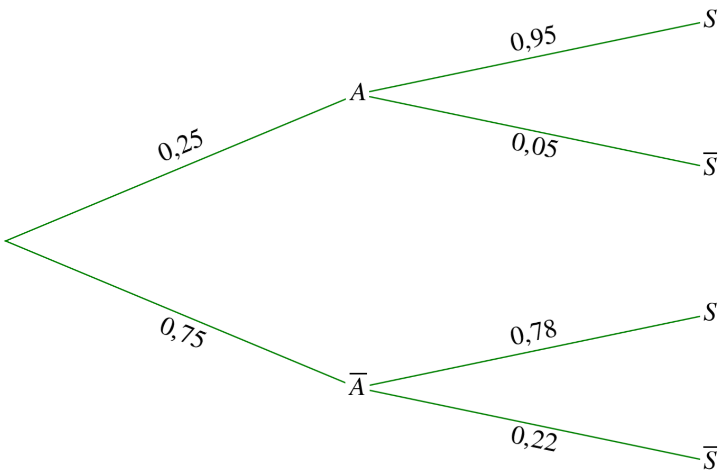
$P(T) = 0{,}89$ et $P(A) = 0{,}87$, $P(\overline{T} \cap \overline{A}) = 0{,}08$

$P(T \cup A) = 1 - P(\overline{T \cup A}) = 1 - P(\overline{T} \cap \overline{A}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$

$P(T \cup A) = P(T) + P(A) - P(T \cap A)$ donc $0{,}92 = 0{,}89 + 0{,}87 - P(T \cap A)$

$P(T \cap A) = 1{,}76 - 0{,}92 = 0{,}84$ donc 84 % des visiteurs vérifient les conditions requises pour essayer la nouvelle attraction.

2.



a. $P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap \overline{A}) = 0{,}25 \times 0{,}95 + 0{,}78 \times 0{,}75 = 0{,}822\,5$.

b. $P_{\overline{S}}(\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{S} \cap \overline{A})}{P(\overline{S})} = \dfrac{0{,}75 \times 0{,}22}{0{,}8225} = 0{,}2006$

3. $n = 200$, $p = 0{,}822\,5$ donc $n\,p > 5$ et $n\,(1 - p) > 5$ donc on peut utiliser un intervalle de fluctuation au niveau de confiance 95 %.

$$I = \left[0{,}8225 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}8225 \times (1 - 0{,}8225)}}{200} \,;\, 0{,}8225 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}8225 \times (1 - 0{,}8225)}}{200} \right]$$

$I = [0{,}8187 \,;\, 0{,}8263]$

On interroge 200 personnes, parmi elles, 46 se disent insatisfaites donc la proportion de personnes satisfaites est $1 - \dfrac{46}{200} = 0{,}77$.

$0{,}77 \notin I$ donc avec un niveau de confiance 95 %, le directeur ne peut pas être rassuré.

EXERCICE 2 6 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. A $t = 0$, le nombre de cellules de la tumeur est N_0, il double en 14 semaines donc $N(14) = 2\,N_0$

$e^{14\,a} = 2$ soit $14\,a = \ln 2$ donc $a = \dfrac{\ln 2}{14}$ soit $a \approx 0{,}0495$

2. Après l'intervention, $N_0 \leq 104$

La tumeur pourra redevenir détectable au toucher au bout d'un temps t tel que $N(t) = N_0\,e^{0{,}05\,t} = 109$

soit $\ln N_0 + 0{,}05\,t = \ln 109$ donc $0{,}05\,t = \ln 109 - \ln N_0$ donc $t \geq 20 \ln 109 - 20 \ln 104$

A partir de $t \geq 0{,}939$. Sans suivi médical, la tumeur devient détectable au bout d'une semaine après l'intervention.

Partie B

1. Détermination de la clairance

a. Au bout de 6 heures, la concentration du médicament dans l'organisme est $c(6) = \dfrac{112}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{80} \times 6}\right) = 6{,}8$

soit $112\left(1 - e^{-\frac{3}{40}k}\right) - 6{,}8\,k = 0$

b. Soit $f(x) = 112\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right) - 6{,}8\,x$.

f est définie continue dérivable sur [0 ; + ∞ [et $f'(x) = 112 \times \dfrac{3}{40}\, e^{-\frac{3}{40}x} - 6{,}8 = 8{,}4\, e^{-\frac{3}{40}x} - 6{,}8$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{3}{40}x} \geq \dfrac{6{,}8}{8{,}4}$ et $x \geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{40}x \geq \ln\dfrac{17}{21}$ et $x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{40 \ln\left(\dfrac{17}{21}\right)}{3}$

Soit $\alpha = \dfrac{40 \ln\left(\dfrac{17}{21}\right)}{3}$

f est strictement croissante sur [0 ; α] et $f(0) = 0$ donc pour tout x de] 0 ; α], $f(x) > 0$

f est strictement décroissante sur [α ; + ∞ [et $f(\alpha) > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ donc pour tout x de [α ; + ∞ [l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle [α ; + ∞ [donc sur] 0 ; + ∞ [.

c. $f(5{,}84) > 0$ et $f(5{,}85) < 0$ donc $5{,}84 < \alpha < 5{,}85$.

f est positive sur [0 ; α] et négative sur [α ; + ∞ [

$f(x) = 112\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right) - 6{,}8\,x$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{112}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{80}\times 6}\right) \geq 6{,}8$

donc la concentration du médicament dans l'organisme est inférieure à 6,8 µmol. L^{-1} tant que $k \in [0 ; \alpha]$.

2. Réglage du débit

a. $c(t) = \dfrac{D}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{80}\times t}\right)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{k}{80}t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} c(t) = \dfrac{D}{k}$.

b. La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite $\ell = \dfrac{D}{k}$

cette concentration limite doit être de 16 µmol. L^{-1} donc $\dfrac{D}{k} \leq 16$ or la clairance du patient est de 5,85 L.h^{-1} donc $k = 5{,}85$

donc D ≤ 16 × 5,85 soit D ≤ 93,6 µmol.h^{-1}

EXERCICE 3 3 points Commun à tous les candidats

1. Si le réel θ appartient à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{3\pi}{4}\right[$ alors $-\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} < \theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}$ soit $-\dfrac{\pi}{2} < \theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$.

2. Le point M appartient à la droite D si et seulement si $y = -x + 2$.

Soit ρ et θ les coordonnées polaires de M alors $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$,

La droite ne passe pas par O donc OM ≠ 0 donc ρ > 0

θ appartient à un intervalle de longueur 2 π par exemple $\left]-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{3\pi}{4}\right[$ donc $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$ et ρ > 0.

$M \in D \Leftrightarrow y = -x + 2 \Leftrightarrow \rho\sin\theta = \rho\cos\theta + 2 \Leftrightarrow \rho(\cos\theta + \sin\theta) = 2$

$\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\theta\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$ donc $\rho(\cos\theta + \sin\theta) = 2 \Leftrightarrow \rho\sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \rho = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)}$

Le point M de coordonnées polaires (ρ ; θ) appartient à la droite D si et seulement si $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)}$, avec $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{3\pi}{4}\right[$ et ρ > 0.

3. $OM = \rho = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)}$

Le réel θ appartient à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{3\pi}{4}\right[$ donc $-\dfrac{\pi}{2} < \theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ est maximal si $\theta - \dfrac{\pi}{4} = 0$ soit si $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

ρ est alors minimal et est égal à $\sqrt{2}$.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. 2001 = 2000 + 1 donc le nombre de tortues en 2001 est $u_1 = 0{,}9 \times 0{,}3\ (1 - 0{,}3)\ ) = 0{,}189$ milliers de tortues soit 189 tortues.

2002 = 2000 + 2 donc le nombre de tortues en 2001 est $u_1 = 0{,}9 \times 0{,}189\ (1 - 0{,}1{,}89)\ ) = 0{,}1379511$ milliers de tortues soit 138 tortues.

2. *a.* $0 \le 1 - u_n \le 1$ donc $0 \le 0{,}9\ u_n\ (1 - u_n) \le 0{,}9\ u_n$ soit pour tout entier naturel n, $0 \le u_{n+1} \le 0{,}9\ u_n$.

b. Initialisation : $u_0 = 0{,}3$ donc $0 \le u_n \le 0{,}3 \times 0{,}9^0$, la propriété est initialisée.

Hérédité : Montrons pour tout entier n, que si $0 \le u_n \le 0{,}3 \times 0{,}9^n$ alors $0 \le u_{n+1} \le 0{,}3 \times 0{,}9^{n+1}$.

$0 \le u_{n+1} \le 0{,}9\ u_n$

$0{,}9\ u_n \le 0{,}9 \times 0{,}3 \times 0{,}9^n$ en utilisant l'hypothèse de récurrence et en multipliant lest termes de l'inégalité par 0,3

On a donc : $0 \le u_{n+1} \le 0{,}9\ u_n \le 0{,}3 \times 0{,}9^{n+1}$ soit $0 \le u_{n+1} \le 0{,}3 \times 0{,}9^{n+1}$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier n, $0 \le u_n \le 0{,}3 \times 0{,}9^n$.

c. $0 \le 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

La population de tortues est promise à l'extinction.

3. 30 tortues correspondent à 0,03 milliers de tortues

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur 0,3
	n prend la valeur 0
	Tant que $u > 0{,}03$ faire :
	n prend la valeur $n + 1$
	u prend la valeur $0{,}9\ u\ (1 - u)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

Partie B

1.

Année	n	v_n	Population de tortues
2010	0	0,032	32
2011	1	0,03283456	33
2012	2	0,033661839	34

2. La suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 1{,}06\ v_n\ (1 - v_n)$,

Soit $v_{n+1} = f(v_n)$ où f est la fonction définie sur R par $f(x) = 1{,}06\ x\ (1 - x)$, f est continue sur R donc en passant à la limite : $\ell = 1{,}06\ \ell\ (1 - \ell)$.

3. $\ell = 1{,}06\ \ell\ (1 - \ell)$ donc soit $\ell = 0$ soit $1{,}06\ (1 - \ell) = 1$ donc $\ell = \dfrac{0{,}06}{1{,}06}$ soit environ 0,056

La suite (v_n) est croissante et $v_0 > 0$ donc $\ell > 0$ donc la population de tortues tendra vers 56 tortues et ne sera plus en voie d'extinction.