Centres étrangers 2018

Mathématiques STMG

Exercice 1 (4 points)

A l'issue de la célébration du 500e anniversaire de sa ville, le directeur de l'office du tourisme a commandé une enquête visant à estimer les retombées économiques de cette manifestation. Cette enquête a été réalisée auprès de personnes s'y étant rendues. Il en ressort que :

- 15% des personnes interrogées ont entre 18 et 25 ans;
- 40% des personnes interrogées ont entre 26 et 45 ans;
- 45% des personnes interrogées ont 46 ans ou plus.

Il a été demandé aux personnes interrogées si elles s'étaient rendues au restaurant lors de cette manifestation. Les réponses sont synthétisées ci-dessous :

- parmi les 18-25 ans, 28% se sont rendus au restaurant;
- parmi les 26-45 ans, 42% se sont rendus au restaurant;
- parmi les personnes de 46 ans ou plus, 63% se sont rendues au restaurant.

Ce questionnaire a permis de remplir une fiche par personne interrogée, précisant son âge et indiquant si elle s'est rendue ou non au restaurant.
On choisit de façon équiprobable l'une de ces fiches. On définit les événements suivants :

E : « la fiche est celle d'une personne ayant entre 18 et 25 ans
F : «la fiche est celle d'une personne ayant entre 26 et 45 ans
G : « la fiche est celle d'une personne ayant plus de 46 ans
R : «la fiche est celle d'une personne s'étant rendue au restaurant

1. Compléter l'arbre pondéré donné **en annexe, à rendre avec la copie**. Voir annexe
2. Définir par une phrase l'événement $F \cap R$. L'évènement $F \cap R$ est l'évènement « la personne a entre 26 et 45 ans **et** est allée au restaurant ». Calculer sa probabilité. La probabilité de $F \cap R$ est la probabilité calculée sur le chemin qui passe par F et par R donc $P(F \cap R)=0,4 \times 0,42 =0,168$
3. Montrer que la probabilité de l'événement R est égale à 0,4935.

   La probabilité de l'évènement R est la somme des probabilités qui mènent à cet évènement donc

   $p(R) = p(E \cap R) + p(F \cap R) + p(G \cap R) = 0,15 \times 0,28 +0,4 \times 0,42 +0,45 \times 0,63 =0,4935$
4. Sachant que la fiche choisie est celle d'une personne s'étant rendue au restaurant lors des festivités de 2017, calculer la probabilité que ce soit celle d'une personne ayant plus de 46 ans.
   On veut calculer $p_R(G)$ or $p_R(G) = \frac{p(G \cap R)}{p(R)} = \frac{0,45 \times 0,63}{0,4935} =0,5744680851$ donc $p_R(G) \approx 0,5745$

Exercice 2 (4 points)

Une entreprise de blanchisserie propose à ses clients d'utiliser sur place ses machines à laver. Conscient des enjeux environnementaux, le gérant s'interroge sur la consommation en eau, par cycle de lavage, de ses machines. Il fait réaliser une étude par une société de conseil spécialisée dans l'accompagnement vers la transition énergétique.

1. Cette étude permet de modéliser la consommation en eau, exprimée en litre, par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance 90 et d'écart type 5.

Le graphique figurant **en annexe, à rendre avec la copie**, représente la courbe de densité de la variable aléatoire X.
Hachurer sur ce graphique le domaine correspondant à l'événement $\{X > 80\}$ et donner la valeur de sa probabilité. (Zone colorée en bleu sur l'annexe)

$P(X > 80) = 0,977249938$

Sur la calculatrice TI : « 2nd » et « VAR » puis normalFrép(*80*,10^99, 90, 5)

Sur CASIO : « OPTN » puis choisir « STAT », « DIST », « NORM » puis normCD(*80*,10^99, 5, 90)

2. La société de conseil suggère au gérant de remplacer ses machines par de nouvelles, moins énergivores et mieux éco-conçues. Leur consommation en eau, exprimée en litre, est modélisée par une variable aléatoire Y suivant la loi normale d'espérance 45 et d'écart type 2. Un graphique en **annexe** représente la courbe de densité de la variable aléatoire Y.
Interpréter, dans le contexte de l'exercice, l'aire du domaine hachuré et donner sa valeur.

L'aire hachurée représente la probabilité que la consommation d'eau soit comprise entre 41litres et 49 litres.

$P(41<Y<49)= 0,954499876$

Sur la calculatrice TI : « 2nd » et « VAR » puis normalFrép(*41*,49, 45, 2)

Sur CASIO : « OPTN » puis choisir « STAT », « DIST », « NORM » puis normCD(*41*,49, 2, 45)

3. La société de conseil affirme au gérant que 90 % des clients sont sensibles aux questions environnementales.
Avant de remplacer son parc de machines, le gérant réalise un sondage auprès de 350 clients.
Ce sondage révèle alors que, parmi eux, 290 y sont sensibles.
Ce résultat permet-il de remettre en cause l'affirmation de la société de conseil? Argumenter la réponse à l'aide d'un intervalle de fluctuation.
On interroge 350 personnes donc la taille de l'échantillon est n = 350. La proportion proposée est $p = 90\% = 0,9$.
Dans un échantillon de taille 350, une proportion de 90% permet de savoir que les fréquences vont fluctuer au seuil de 95% dans l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ soit ici $[0,9 - \frac{1}{\sqrt{350}} ; 0,9 + \frac{1}{\sqrt{350}}]$
c'est-à-dire [0,8465 ; 0,9535]
ici la fréquence est $f = \frac{209}{350} = 0,8285$
Cette fréquence n'appartient pas à 'intervalle donc la proportion de 90% est remise en cause à 95%. Il faudrait refaire un sondage auprès de 350 clients pour voir si on est dans les 5% d'exception. L'entreprise de conseil a tout intérêt à faire changer les machines....

Exercice 3 (7 points)

Julien vient de créer une application informatique destinée aux particuliers et permettant l'organisation d'événements. Le 1er avril 2018, il envoie une offre de téléchargement de son application à toutes les personnes de son carnet d'adresses.
Chaque semaine, il a relevé le nombre de personnes ayant téléchargé son application. Ses observations sur les cinq premières semaines sont répertoriées dans le tableau ci-dessous. Le rang 0 correspond à la semaine du 1er au 7 avril 2018.

x_i : rang de la semaine	0	1	2	3	4
y_i : nombre de téléchargements	150	180	210	260	296

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : étude d'un premier modèle

Une représentation graphique du nuage de points de coordonnées (x_i ;y_i) est donnée en **annexe**.

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation réduite de la droite d'ajustement de` y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. On donnera les valeurs exactes des deux coefficients.

   A l'aide de la calculatrice, on trouve : a = 37,2 et b = 144,8

   donc l'équation de la droite est y = 37,2 x +144,8

   Julien décide d'ajuster ce nuage par la droite D d'équation $y = 37x + 145$. Remarque : compatible avec les coefficients trouvés ci-dessus… Déterminer les coordonnées de deux points de la droite D.

   Pour $x = 0$, $y = 37 \text{ x } 0 + 145 = 145$

   Pour $x = 9$, $y = 37 \text{ x } 9 + 145 = 478$

   On place les points A(0 ; 145) et B(9 ; 478)

   Représenter la droite D sur le graphique de **l'annexe, à rendre avec la copie**.

2. Selon ce modèle, quel est le nombre de téléchargements attendus à la fin de la semaine de rang 10?

   Pour $x = 10$, $y = 37 \text{ x } 10 + 145 = 515$

   A la fin de la semaine de rang 10, par extrapolation, 515 téléchargements sont attendus.

Partie B : étude d'un second modèle

En réalité, le nombre de téléchargements effectués jusqu'à la fin de la semaine de rang 10 est donné par le tableau ci-dessous.

x_i : rang de la semaine	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i : nombre de téléchargements	150	180	210	260	296	370	457	572	698	883	1095

1. Justifier que le taux d'évolution global du nombre de téléchargements entre la semaine de rang 4 et la semaine de rang 10 est de 270%.

   $Tg = \frac{Vf-Vi}{Vi} = \frac{V10-V4}{V4} = \frac{1095-296}{296} = \frac{799}{296} = 2{,}699324324$ soit 269,9% arrondi à 270%

2. En déduire le taux d'évolution hebdomadaire moyen du nombre de téléchargements entre la semaine de rang 4 et la semaine de rang 10.

   Le taux moyen se calcul par : $t_m = (1+Tg)^{\frac{1}{n}} - 1$ où n est le nombre d'évolutions.

   Entre les rangs 4 et 10, il y a 6 évolutions donc $t_m = (1+Tg)^{\frac{1}{6}} - 1 = (1+2{,}699)^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0{,}2436$ soit un taux moyen hebdomadaire de 24,36%

On fait l'hypothèse qu'à partir de la semaine de rang 10, le taux d'évolution hebdomadaire du nombre de téléchargements est constant et égal à 24 %. Remarque : compatible avec la réponse à la question précédente….
Le nombre de téléchargements hebdomadaires au cours de la semaine de rang $(10 + n)$ est alors modélisé par le terme u_n d'une suite de premier terme $u_0 = 1095$.

3. Justifier que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

   Chaque semaine, le nombre de téléchargements augmente de 24%, cette augmentation correspond à un coefficient multiplicateur de 1+t = 1+0,24 = 1,24. Donc chaque semaine, le nombre de téléchargement est multiplié par 1,24. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 1,24 et on a $u_{n+1}=u_n \times 1,24$.

4. Exprimer u_n en fonction de l'entier naturel n.

   On a $u_n = u_0 \times q^n$ soit $u_n = 1095 \times 1,24^n$

5. Selon ce modèle, combien de téléchargements Julien peut-il espérer lors de la semaine de rang 20?

   Pour le rang 20, n = 10 , $u_{10} = 1095 \times 1,24^{10} = 9410,89593$ soit 9411 téléchargements.

6. Un sponsor a contacté Julien, lui proposant une participation financière pour promouvoir son projet à plus grande échelle, dès lors que le nombre de téléchargements hebdomadaires dépassera 20 000.
   Compléter les deux lignes non renseignées dans l'algorithme donné en **annexe, à rendre avec la copie,** pour qu'après exécution, la variable N contienne le rang de la semaine à partir de laquelle Julien sera sponsorisé. Voir annexe

Exercice 4 (5 points)

Une entreprise est spécialisée dans le recyclage de bouteilles d'eau en plastique.
Elle peut produire chaque jour entre 0 et 10 tonnes de plastique qu'elle revend en totalité au prix unitaire de 700 € la tonne.
On rappelle que le coût moyen correspondant à la production de x tonnes de plastique est défini par $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$, ou` $C_T(x)$ est le coût total pour la production de x tonnes de plastique.
Le coût marginal, noté C_m, est le coût induit par la production d'une tonne de plastique supplémentaire lorsqu'on a déjà produit x tonnes de plastique.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Sur l'**annexe** sont tracées les courbes représentant les coûts moyen et marginal (en euro) en fonction de la quantité de plastique produite (en tonne) ainsi que la droite représentant le prix de vente unitaire.
On admet que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

1. Déterminer graphiquement la quantité de plastique que doit produire l'entreprise pour que le coût moyen soit minimal. Le coût moyen est minimal pour 5 tonnes produites. (En rouge sur le graphique)
2. Déterminer graphiquement ce coût moyen minimal et en déduire le coût total correspondant.

   Pour 5t produites, par lecture graphique, le coût moyen est de $C_M(5) = 400$€.

   or $C_M(5) = \frac{CT(5)}{5}$ donc $C_T(5) = 5 \times C_M(5) = 5 \times 400 = 2000$ Ce qui fait un coût total de 2000 euros pour 5t produites.

Partie B

On dit qu'il y a profit lorsque le prix de vente unitaire est strictement supérieur au coût moyen. On admet que le profit de l'entreprise est maximal lorsque le coût marginal est égal au prix de vente unitaire.

1. Pour quelles quantités de plastique produites, l'entreprise réalise-t-elle un profit? Le résultat sera donné sous la forme d'un intervalle.

   Par lecture graphique, le prix de vente est au-dessus de la droite représentant le prix moyen sur l'intervalle [2 ;9] (En vert sur le graphique de l'annexe)

2. Déterminer graphiquement la quantité de plastique que doit produire l'entreprise pour que le profit soit maximal.

   Le profit est maximal lorsque le coût marginal est égal au prix de vente c'est-à-dire lorsque la courbe du coût marginal coupe la droite représentant le prix moyen. On trouve : x = 6 (En orange sur l'annexe)

3. Quel est le coût moyen correspondant à cette production?

   Pour x = 6, on lit graphiquement que C_M (6) = 450€ (en rose sur l'annexe)

4. En déduire le coût total correspondant.

Pour 6t produites, par lecture graphique, le coût moyen est de $C_M(6)$ = 450€.

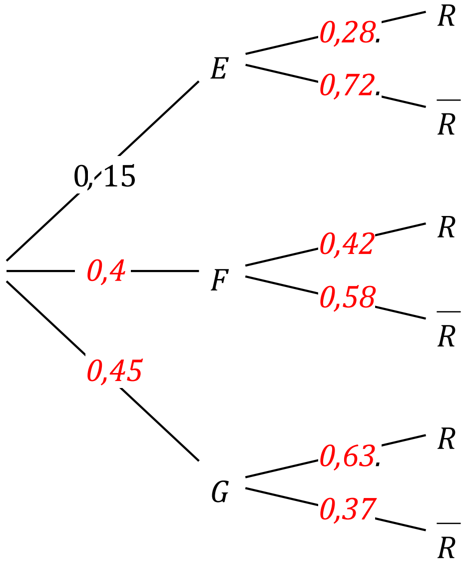
or $C_M(6) = \frac{CT(6)}{6}$ donc C_T (6) = 6 x $C_M(6)$ = 6 x 450 = 2700 Ce qui fait un coût total de 2700 euros pour 5t produites.

5. Calculer le profit total maximal.

Le profit est la différence entre les recettes et le coût total. Pour 6t vendues, les recettes sont de R(6) = 6 x 700 = 4200€ et C_T (6) = 2700€
donc le profit maximal total est R(6) - C_T (6) = 4200 – 2700 = 1500€.
Le profit total maximal que peut donc espérer l'entreprise est de 1500€.

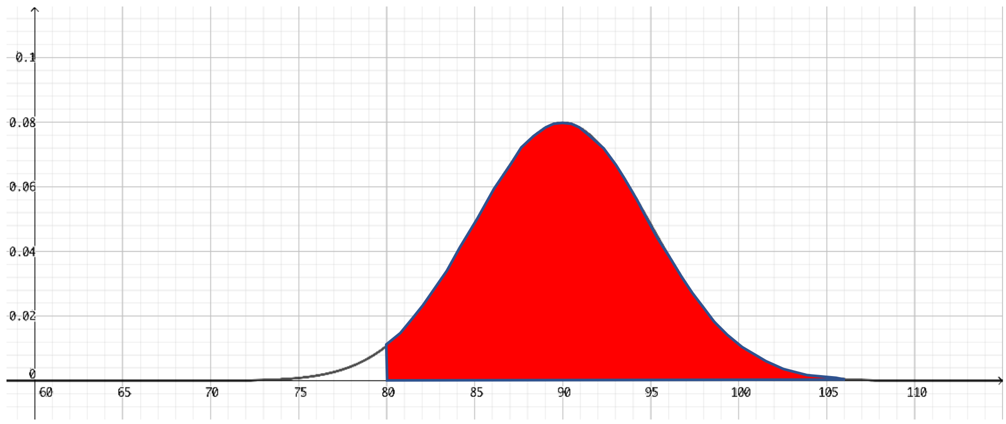
ANNEXE (`a rendre avec la copie)

Exercice 1

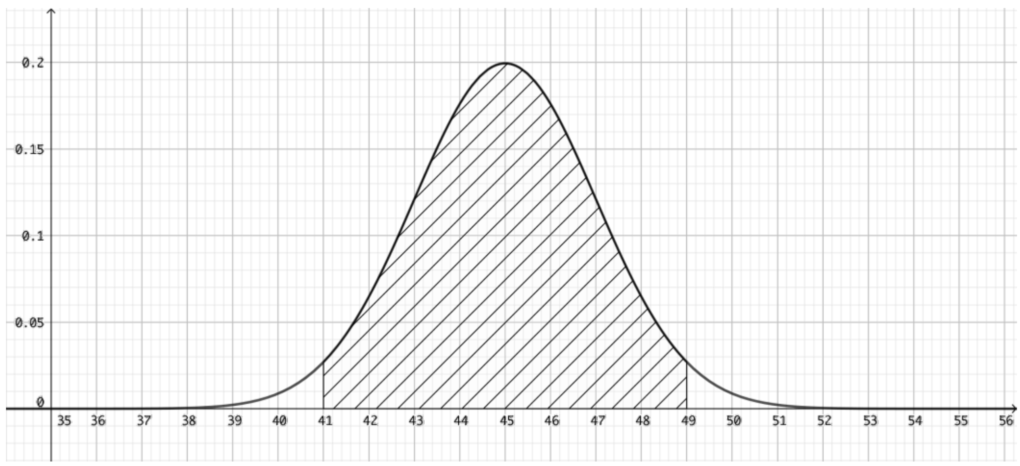


Exercice 2

Question 1.



Question 2.



Modèle CMEN-DOC v2 A4 ©NEOPTEC

Nom de famille : (Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

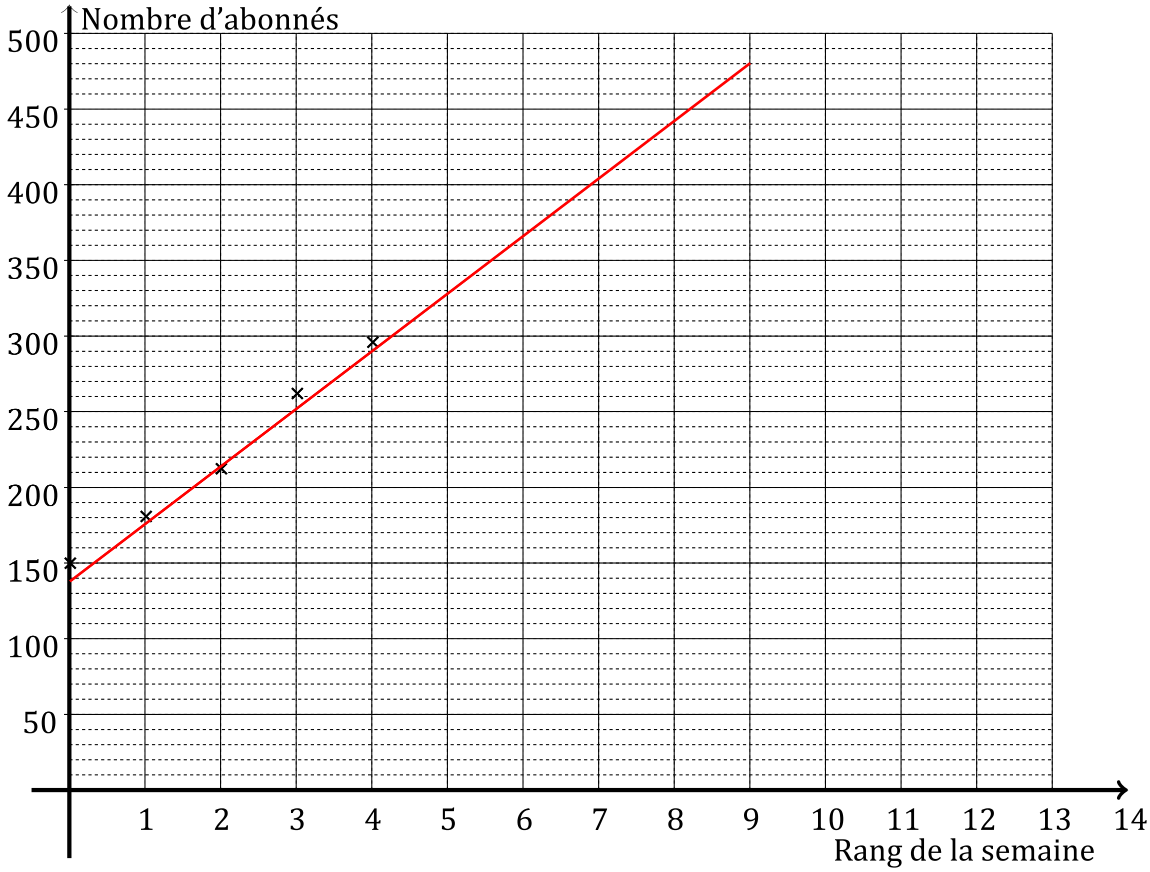
Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

Exercice 3 - Partie A, question 2



ANNEXE (`a rendre avec la copie)

Exercice 3 - Partie B, question 6

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 1095$
Tant que $u<20000$
    $U \leftarrow 1,24 \times U$
    $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que
$N \leftarrow 10 + N$

Modèle CMEN-DOC v2 A4 ©NEOPTEC

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

Exercice 4