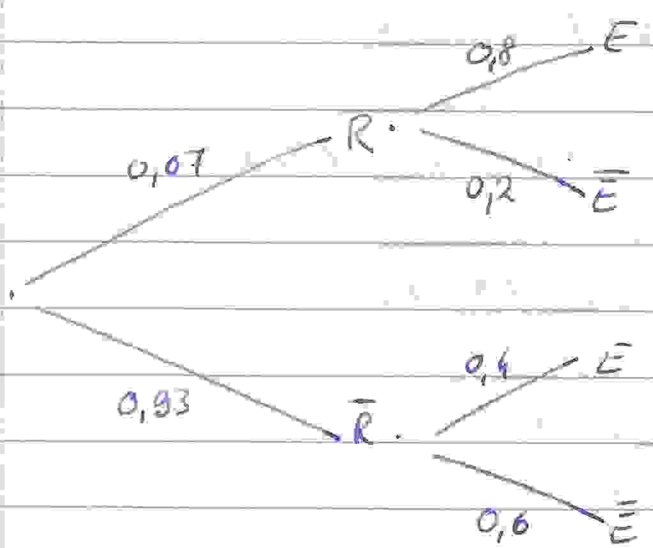
CALCUNE Gaïus
24-MATSXANA1 Correction

Exercice 1 (5 pts)

A- 1)



$P(R \cap E) = P(R)\, P_R(E) = 0{,}07 \times 0{,}8 = 0{,}056$

2) $P(E) = P(R \cap E) + P(\bar{R} \cap E)$

$= 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}4$

$= 0{,}056 + 0{,}372$

$= 0{,}428$

3) $P_E(R) = \dfrac{P(E \cap R)}{P(E)} = \dfrac{P(R \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}056}{0{,}428} = 0{,}131$

B - 1) 30 tirages successif indépendants sont réalisés avec une probabilité de succès inchangée $p = 0,07$.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
Donc, $X \hookrightarrow B(30, 0,07)$

2) $P(X < 6) = P(X \leq 5) \approx 0,984$

3) ~~$\forall k \geq 2, \quad P(X \geq k+1) \leq P(X \geq k)$~~
~~$\forall k \leq 2, \quad P(X \geq k+1)$~~
$\forall k \geq 0, \quad P(X \geq k+1) \leq P(X = k)$
Comme $P(X \geq 2) = 0,631$
Et que $P(X \geq 3) = 0,351$
On en déduit que $k = 2$.

4)
$P(X \geq 1) \geq 0,95 \iff 1 - P(X=0) \geq 0,95$
$\iff P(X=0) \leq 0,05$
Comme $P(X=0) = \binom{n}{0} 0,07^0 \, 0,93^n$
$= 0,93^n$
On a : $0,93^n \leq 0,05$
Par croissance de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :
$n \ln(0,93) \leq \ln(0,05)$
$n \geq \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)}$
$n \geq 41,28$

$n \geq 42$.

Il faut tirer au minimum 42 objets pour atteindre cet objectif.

Exercice 2 (4 pts)

1) c)

2) d)

3) b)

4) a)

Exercice 3 (5 pts)

A - 1) Graphiquement : $f'(1) = 3$

T a pour ordonnée à l'origine -4 et pour coefficient directeur $\frac{1}{3}$ donc T admet pour équation réduite :

$y = \frac{1}{3}x - 4$

B- 1)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\ln(x^2) - \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x\ln(x^2) - \frac{1}{x} = -\infty.$$

2a)

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$f'(x) = \ln(x^2) + x \times \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$= \ln(x^2) + \frac{1}{x^2} + 2$$

2b)

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$f''(x) = \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 2}{x^3}$$

$$= \frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

$$= \frac{2(x-1)(x+1)}{x^3}$$ CQFD.

3a)

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\quad 2 > 0$

$x+1 > 0$

$x^3 > 0$

donc $f''(x)$ est du signe de $x-1$.

On en déduit :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		CC		CV.	

3b)

On a aussi :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$	$f'(1)=3$	$\nearrow$	$+\infty$

Donc $f' > 0 \ \forall x \in D_f$.

D'où :

x	0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4a)
f est strictement croissante sur D_f.
De plus, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \leq 0 \leq \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

D'après le théorème de la bijection, il existe donc une unique solution à l'équation $f(x)=0$. On la note α.

4b) $\alpha \approx 1{,}33$.
Si α est solution, on a :
$$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha\ln(\alpha^2)-\frac{1}{\alpha}=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha\ln(\alpha^2)=\frac{1}{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \ln(\alpha^2)=\frac{1}{\alpha^2}$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 = e^{\frac{1}{\alpha^2}}$$
CQFD

Exercice 4 (6 pts)

1) $I_0 = \int_0^{\pi} e^0 \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$

2a)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0;\pi]$.

$\forall n$, $e^{-nx} \geq 0$

Comme $0 \leq \sin x \leq 1$, on a :

$$e^{-nx} \sin x \geq 0$$

Enfin, par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx \geq 0$$

$$I_n \geq 0 \qquad \text{CQFD.}$$

2b)

Nous allons procéder par intégration par parties.

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx$$

Mais $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \sin x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0 e^{-nx} \cos x \, dx$

Or $\displaystyle\frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos x \, dx = \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \cos x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx$

D'où : $\displaystyle\frac{n+1}{n} \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \sin x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \cos x\right]_0^{\pi}$

Au final : $\displaystyle I_n = \frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \cos x\right]_0^{\pi}$

$$= \frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{n} e^{-n\pi} \cos \pi + \frac{1}{n} e^{0} \cos 0\right]$$

$$= \frac{e^{-n\pi} + 1}{n(n+1)}$$

Par suite, on obtient alors :

$$I_{n+1} = \frac{e^{-(n+1)\pi}+1}{(n+1)(n+2)}$$

Mais comme $n \in \mathbb{N}$, on a :

d'une part $e^{-(n+1)\pi} \leq e^{-n\pi}$

d'autre part $(n+1)(n+2) \geq n(n+1)$

Ainsi : $I_{n+1} \leq I_n$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$$

2c) $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. D'après le théorème de convergence monotone, (I_n) converge.

3a) Comme $\forall x \in [0;\pi]$ on a $0 \leq \sin x \leq 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $e^{-nx} \sin x \leq e^{-nx}$

Alors, par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx \leq \int_0^{\pi} e^{-nx}\, dx$$

$$I_n \leq \int_0^{\pi} e^{-nx}\, dx$$

3b) $\int_0^{\pi} e^{-nx}\, dx = \left[\frac{-1}{n} e^{-nx}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n} e^{-n\pi} + \frac{1}{n} = \frac{1-e^{-n\pi}}{n}$

3c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1-e^{-n\pi}}{n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} 0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} I_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1-e^{-n\pi}}{n}$

$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} I_n \leq 0$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

4a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
On a d'après 2c) :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \sin x \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{n} J_n$$

D'autre part, on a :

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx$$

$$= \left[-e^{-nx} \cos x \right]_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos x \, dx$$

$$= -e^{-n\pi} \cos \pi + e^0 \cos 0 - n \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos x \, dx$$

$$= 1 + e^{-nx} - n J_n$$

CQFD.

4b) Procédons par intégration par parties.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-nx} \cos x \, dx$

$$= \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \cos x \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \cos x \right]_0^{\pi} + -\frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \sin x \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos x \, dx$$

D'où $J_n = \dfrac{n^2}{n^2+1} \left[-\dfrac{1}{n} e^{-nx} \cos x \right]_0^{\pi}$

$$= \frac{n^2}{n^2+1} \left[-\frac{1}{n} e^{-n\pi} \cos \pi + \frac{1}{n} e^{0} \cos 0 \right]$$

$$= \frac{n^2}{n^2+1} \left(\frac{1}{n} \right) \left(e^{-n\pi} + 1 \right)$$

$$= \frac{n \left(e^{-n\pi} + 1 \right)}{n^2+1}$$

Or $I_n = \dfrac{1}{n} J_n = \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{n \left(e^{-n\pi} + 1 \right)}{n^2+1} \right)$

$$= \frac{e^{-n\pi} + 1}{n^2+1} \qquad \text{(QFD)}$$

5) while $I \geqslant 0,1$: