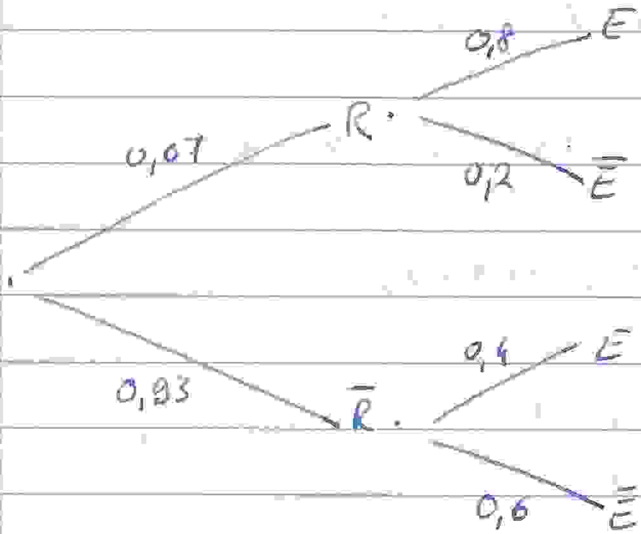
CALCONE Gaïus

24-MATSIANA Correction

<u>Exercice 1 (5 pts)</u>

A- 1)



$P(R \cap E) = P(R)\, P_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

2) $P(E) = P(R \cap E) + P(\bar{R} \cap E)$

$= 0,056 + 0,93 \times 0,4$

$= 0,056 + 0,372$

$= 0,428$

3) $P_E(R) = \dfrac{P(E \cap R)}{P(E)} = \dfrac{P(R \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,056}{0,428} = 0,131$

B - 1) 30 tirages successif indépendants sont réalisés avec une probabilité de succès inchangée $p = 0{,}07$.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre des succès.
Donc, $X \hookrightarrow B(30, 0{,}07)$ et $E(X) = 0{,}07 \times 30 = 2{,}1$

2) $P(X < 6) = P(X \leq 5) \approx 0{,}984$

3) $\cancel{\forall k \geq 2, \quad P(X \geq k+1) \leq P(X \geq k)}$
$\cancel{\forall k \leq 2, \quad P(X \geq k+1)}$
$\forall k \geq 0, \quad P(X \geq k+1) \leq P(X = k)$
Comme $P(X \geq 2) = 0{,}631$
Et que $P(X \geq 3) = 0{,}351$
On en déduit que $k = 2$.

4)
$P(X \geq 1) \geq 0{,}95 \iff 1 - P(X = 0) \geq 0{,}95$
$\iff P(X = 0) \leq 0{,}05$
Comme $P(X = 0) = \binom{n}{0} 0{,}07^0 \, 0{,}93^n$
$= 0{,}93^n$
On a : $0{,}93^n \leq 0{,}05$
Par croissance de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$n \ln(0{,}93) \leq \ln(0{,}05)$$

$$n \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}93)}$$

$$n \geq 41{,}28$$

$n \geq 42.$

Il faut tirer au minimum 42 objets pour atteindre cet objectif.

Exercice 2 (4 pts)

1) c)

2) d)

3) b)

4) a)

Exercice 3 (5 pts)

A - 1) Graphiquement : $f'(1) = 3$
T a pour ordonnée à l'origine -4 et pour coefficient directeur 3 donc T admet pour équation réduite :

$\cancel{y = \frac{1}{3}x - 4}$ $\qquad y = 3x - 4$

2) Graphiquement : f est concave sur $]-\infty ; 1]$, convexe sur $[1 ; +\infty[$ et admet un point d'inflexion en $(1 ; -1)$

B- 1)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\ln(x^2) - \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x\ln(x^2) - \frac{1}{x} = -\infty.$$

2a)

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a:

$$f'(x) = \ln(x^2) + x \times \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$= \ln(x^2) + \frac{1}{x^2} + 2$$

2b)

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a:

$$f''(x) = \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 2}{x^3}$$

$$= \frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

$$= \frac{2(x-1)(x+1)}{x^3}$$ CQFD.

3a)

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $2 \geqslant 0$

$x+1 \geqslant 0$

$x^3 \geqslant 0$

donc $f''(x)$ est du signe de $x-1$.

On en déduit :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		CC		CV.	

3b)

On a aussi :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$	$f'(1)=3$	$\nearrow$	$+\infty$

Donc $f' > 0$ $\forall x \in D_f$.

D'où :

x	0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4a)
f est strictement croissante sur D_f.
De plus, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) < 0 < \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

D'après le théorème de la bijection, il existe donc une unique solution à l'équation $f(x) = 0$. On la note α.

4b) $\alpha \approx 1{,}33$.
Si α est solution, on a :

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\iff \alpha \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}$$

$$\iff \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\iff \alpha^2 = e^{\frac{1}{\alpha^2}}$$

CQFD

Exercice 4 (6 pts)

1) $I_0 = \int_0^{\pi} e^0 \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2$

2a)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0;\pi]$.

$\forall n$, $e^{-nx} \geqslant 0$

Comme $0 \leqslant \sin \leqslant 1$, on a :

$e^{-nx} \sin x \geqslant 0$

Enfin, par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx \geqslant 0$$

$I_n \geqslant 0$ CQFD.

2b)

Nous allons procéder par intégration par parties.

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx$$

Mais $\int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \sin x \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos x \, dx$

Or $\frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos x \, dx = \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \cos x \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx$

D'où : $\frac{n+1}{n} \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \sin x \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \cos x \right]_0^{\pi}$

Au final : $I_n = \frac{1}{n+1} \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \cos x \right]_0^{\pi}$

$$= \frac{1}{n+1} \left[-\frac{1}{n} e^{-n\pi} \cos \pi + \frac{1}{n} e^{0} \cos 0 \right]$$

$$= \frac{e^{-n\pi} + 1}{n(n+1)}$$

Par suite, on obtient alors :

$$I_{n+1} = \frac{e^{-(n+1)\pi}+1}{(n+1)(n+2)}$$

Mais comme $n \in \mathbb{N}$, on a :

d'une part $e^{-(n+1)\pi} \leq e^{n\pi}$

d'autre part $(n+1)(n+2) \geq n(n+1)$

Ainsi : $I_{n+1} \leq I_n$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$$

2c) $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. D'après le théorème de convergence monotone, (I_n) converge.

3a) Comme $\forall x \in [0;\pi]$ on a $0 \leq \sin x \leq 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $e^{-nx} \sin x \leq e^{-nx}$

Alors, par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} e^{-nx} \sin x \, dx \leq \int_0^{\pi} e^{-nx} \, dx$$

$$I_n \leq \int_0^{\pi} e^{-nx} \, dx$$

3b) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-nx} \, dx = \left[\frac{-1}{n} e^{-nx}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n} e^{-n\pi} + \frac{1}{n} = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$

3c) $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1-e^{-nx}}{n}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} 0 \leq \lim_{n \to +\infty} I_n \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1-e^{-nx}}{n}$

$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \to +\infty} I_n \leq 0$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

4a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

On a d'après 2c) :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \sin x \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi e^{-nx} \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{n} J_n$$

D'autre part, on a :

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin x \, dx$$

$$= \left[-e^{-nx} \cos x \right]_0^\pi - \cancel{+} n \int_0^\pi e^{-nx} \cos x \, dx$$

$$= -e^{-n\pi} \cos \pi + e^0 \cos 0 - \cancel{+} n \int_0^\pi e^{-nx} \cos x \, dx$$

$$= 1 + e^{-nx} - n J_n$$

CQFD.

4b) Procédons par intégration par parties.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos x \, dx$

$= \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \cos x\right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi e^{-nx} \sin x \, dx$

$= \left[\frac{1}{n} e^{-nx} \cos x\right]_0^\pi + -\frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \sin x\right]_0^\pi + \frac{1}{n^2} \int_0^\pi e^{-nx} \cos x \, dx$

D'où $J_n = \frac{n^2}{n^2+1} \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \cos x\right]_0^\pi$

$= \frac{n^2}{n^2+1} \left[-\frac{1}{n} e^{-n\pi} \cos \pi + \frac{1}{n} e^0 \cos 0\right]$

$= \frac{n^2}{n^2+1} \left(\frac{1}{n}\right) \left(e^{-n\pi} + 1\right)$

$= \frac{n\left(e^{-n\pi} + 1\right)}{n^2+1}$

Or $I_n = \frac{1}{n} J_n = \frac{1}{n} \left(\frac{n\left(e^{-n\pi}+1\right)}{n^2+1}\right)$

$= \frac{e^{-n\pi}+1}{n^2+1}$ (QFD)

5) while $I \geqslant 0,1$: