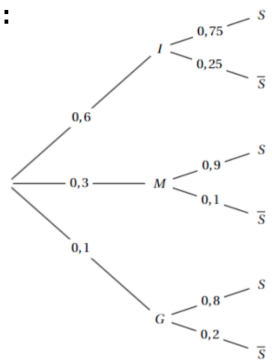
D. BENMAKHLOUF

Ex.1.	
1.	$$f(x)=5xe^{-x}=\frac{5x}{e^x}=5\times\frac{1}{\frac{e^x}{x}}$$ **Par produits/quotient/croissances comparées :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ est ASH en$+\infty$. **VRAIE**
2.	$f'(x)+f(x)=(5xe^{-x})'+5xe^{-x}$ $=5e^{-x}-5xe^{-x}+5xe^{-x}$ $=5e^{-x} \ \Rightarrow f$ solution. **VRAIE**
3.	$u_n=-1-\frac{1}{n+1}$ $\quad w_n=1+\frac{1}{n+1}$ $\quad v_n=(-1)^n$ (u_n) est croissante. (w_n) est décroissante et pourtant (v_n) ne converge pas. **FAUX.**
4.	Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\le v_n\le w_n$ et (u_n) croissante, (w_n) décroissante alors (u_n) est minorée par u_0 et (w_n) est majorée par w_0. Il en va de même pour (v_n). **VRAIE**
Ex.2.	
1.	**ARBRE :** 

2.	$P(I\cap S)=P(I)\times P_I(S)=0{,}6\times 0{,}75=0{,}45$
3.	I, M et S forment un système complet d'événement. Probas totales : $$P(S)=P(I\cap S)+P(M\cap S)+P(G\cap S)=0{,}8.$$
4.	$P_S(I)=\frac{P(I\cap S)}{P(S)}=\frac{0{,}45}{0{,}8}\approx 0{,}563.$
5. a.	1. Epreuve de Bernoulli de paramètre $p=0{,}8$. 2. Schéma de Bernoulli de paramètres $n=30$ et $p=0{,}8$. 3. $X\sim B(30;0{,}8)$
5. b.	$P(X\ge 25)=1-P(X\le 24)\approx 0{,}428$
6.	On cherche n tel que $P(X\le n-1)\ge 0{,}99$ $\Leftrightarrow 1-P(X=n)\ge 0{,}99$ $\Leftrightarrow 1-\binom{n}{n}\times 0{,}8^n\times 0{,}2^{n-n}\ge 0{,}99$ $\Leftrightarrow 0{,}8^n\le 0{,}01$ $\Leftrightarrow n\ge\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$ soit $n\ge 21$.
7. a.	Par linéarité de l'espérance, $E(T)=E(T_1)+E(T_2)=7$ jours en moyenne pour recevoir la commande à son domicile. Par indépendance de T_1 et T_2, $$V(T_1+T_2)=V(T_1)+V(T_2)=3.$$
7.b.	$P(T\in[5;9])=P(4<T<10)$ $=P(-3<T-E(T)<3)$ $=P(\lvert T-E(T)\rvert<3)$ $=1-P(\lvert T-E(T)\rvert\ge 3)$ **D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :**

	$P(\lvert T-E(T)\rvert \geq 3) \leq \frac{V(T)}{3^2}$ $\Leftrightarrow P(\lvert T-E(T)\rvert < 3) \geq 1-\frac{V(T)}{9}$ $\Leftrightarrow P(\lvert T-E(T)\rvert < 3) \geq 1-\frac{3}{9}$ $\Leftrightarrow P(\lvert T-E(T)\rvert < 3) \geq \frac{2}{3}$.

Ex.3	
1.a.	$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-12{,}5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CA}=0$. $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur normal à (CAD).
1.b	$(CAD) : 1x-1y+0z+d=0$ Comme $A\in(CAD)$, on a $d=0$. D'où $(CAD) : x-y=0$
2.a.	**Méthode 1 :** système d'équation on trouve $\boldsymbol{t=1}$. **Méthode 2 :** vérifier par calcul que $\boldsymbol{H\in(CAD)\cap D}$.
2.b.	$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}2{,}5\\-2{,}5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{BH}=2{,}5\,\overrightarrow{n_1}$. **Et** $H\in(CAD)$. H est bien le projeté orthogonal de B sur (CAD).
3.a.	$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}2{,}5\\-2{,}5\\0\end{pmatrix}.\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-2{,}5\\-2{,}5\\0\end{pmatrix}$=0. ABH rectangle en H.
3.b.	$Aire(ABH)=\frac{AH\times BH}{2}=\frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{25}{4}\ u.a.$
4.a.	$\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix}.\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-2{,}5\\-2{,}5\\0\end{pmatrix}$ $=\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix}.\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}2{,}5\\-2{,}5\\0\end{pmatrix}=0.$ **Méthode 1 :** De plus, A, B, H et O sont coplanaires car tous ont pour cote 0. Ils appartiennent tous au plan d'équation $z=0$ et de vecteur directeur $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. **Méthode 2 :** $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ donc $O\in(AH)$ et donc $O\in(ABH)$. H est bien la hauteur du tétraèdre $ABCH$.
4.b.	$V(ABCH)=\frac{1}{3}\times Aire(ABH)\times CO$ $=\frac{1}{3}\times\frac{25}{4}\times 10=\frac{125}{6}$ u.v.
5.	$V(ABCH)=\frac{1}{3}\times Aire(ABC)\times d\big(H;(ABC)\big)$ $\Leftrightarrow \frac{125}{6}=\frac{1}{3}\times\frac{25\sqrt{5}}{2}\times d\big(H;(ABC)\big)$ $\Leftrightarrow d\big(H;(ABC)\big)=\sqrt{5}$ u.l.

Ex.4.	
Partie A	
1.a.	• $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ (limite de ln) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (limite de x et ln)

1.b.	$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}$
1.c	f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. (signe de $2x+1$ car $2x>0$)
1.d.	$f''(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2}$. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f''(x) \leq 0$. f est concave sur $]0;+\infty[$.
2.a.	• f est continue et est strict croissante sur $]0;+\infty[$. • $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ • $0 \in \mathbb{R}$.
2.b.	f est négative sur $]0;\alpha]$ et positive sur $[\alpha;+\infty[$.
2.c.	$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2-\alpha \Leftrightarrow \ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$
Partie B	
1.	$g'(x) = -\frac{7}{8} \times 2x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x}\right)$ $=-\frac{8}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x$ $= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x$. • $xf\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ $= 1 - 2x - \frac{1}{2}x\ln x = g'(x)$.
2.a.	**Méthode 1 :** Pour tout $x \in]0\,;\frac{1}{\alpha}[$ on a $0 < \alpha < \frac{1}{x}$ et par croissance de f sur $]0;+\infty[$ donc **question A.1.c et question A.2.a** pour $f(\alpha)=0$, on en déduit que

	$f\left(\frac{1}{x}\right) > f(\alpha) = 0.$ **Méthode 2 :** Si $x \in]0\,;\frac{1}{\alpha}[$ alors $0 < \alpha < \frac{1}{x}$ et donc d'après la question **A.2.b,** $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.
2.b.	$g'(x)$ est du même signe que $f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0;1[$ car $x>0$.

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
signe de $g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

Partie C	
1.a.	$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2\ln x.$ Le signe de la différence est celui de $-\ln x$. D'où C_g est au-dessus de P sur $]0;1]$
1.b.	Intégration par partie en posant : $u(x) = \ln x$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ $v'(x) = x^2$ donc $v(x) = \frac{x^3}{3}$ $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \; dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\, dx$ $= \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$ en utilisant $\ln\alpha = 2(2-\alpha)$.

2.	Multiplier par $-\frac{1}{4}$ car on doit intègrer sur $\left[\frac{1}{\alpha};1\right]$ l'expression : $$g(x)-\left(-\frac{7}{8}x^2+x\right)=-\frac{1}{4}x^2\ln x.$$ $$A=\frac{\alpha^3+6\alpha-13}{36\alpha}$$