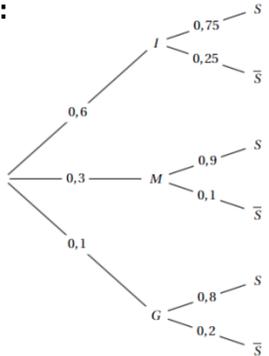


D. BENMAKHOUL

<b>Ex.1.</b>	
<b>1.</b>	$f(x) = 5xe^{-x} = \frac{5x}{e^x} = 5 \times \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$ <p><b>Par produits/quotient/croissances comparées :</b></p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ est ASH en } +\infty. \text{ VRAIE}$
<b>2.</b>	$f'(x) + f(x) = (5xe^{-x})' + 5xe^{-x}$ $= 5e^{-x} - 5xe^{-x} + 5xe^{-x}$ $= 5e^{-x} \Rightarrow f \text{ solution. VRAIE}$
<b>3.</b>	$u_n = -1 - \frac{1}{n+1} \quad w_n = 1 + \frac{1}{n+1} \quad v_n = (-1)^n$ <p><math>(u_n)</math> est croissante. <math>(w_n)</math> est décroissante et pourtant <math>(v_n)</math> ne converge pas. <b>FAUX.</b></p>
<b>4.</b>	<p>Si pour tout <math>n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n</math> et <math>(u_n)</math> croissante, <math>(w_n)</math> décroissante alors <math>(u_n)</math> est minorée par <math>u_0</math> et <math>(w_n)</math> est majorée par <math>w_0</math>. Il en va de même pour <math>(v_n)</math>. <b>VRAIE</b></p>
<b>Ex.2.</b>	
<b>1.</b>	<p><b>ARBRE :</b></p> 

<b>2.</b>	$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$
<b>3.</b>	<p><math>I, M</math> et <math>S</math> forment un système complet d'événement. Probabilities totales :</p> $P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S) = 0,8.$
<b>4.</b>	$P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0,45}{0,8} \approx 0,563.$
<b>5. a.</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Epreuve de Bernoulli de paramètre <math>p = 0,8</math>.</li> <li>Schéma de Bernoulli de paramètres <math>n = 30</math> et <math>p = 0,8</math>.</li> <li><math>X \sim B(30; 0,8)</math></li> </ol>
<b>5. b.</b>	$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \approx 0,428$
<b>6.</b>	<p>On cherche <math>n</math> tel que <math>P(X \leq n - 1) \geq 0,99</math></p> $\Leftrightarrow 1 - P(X = n) \geq 0,99$ $\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{n} \times 0,8^n \times 0,2^{n-n} \geq 0,99$ $\Leftrightarrow 0,8^n \leq 0,01$ $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \text{ soit } n \geq 21.$
<b>7. a.</b>	<p>Par linéarité de l'espérance, <math>E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 7</math> jours en moyenne pour recevoir la commande à son domicile. Par indépendance de <math>T_1</math> et <math>T_2</math>,</p> $V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2) = 3.$
<b>7. b.</b>	$P(T \in [5; 9]) = P(4 < T < 10)$ $= P(-3 < T - E(T) < 3)$ $= P( T - E(T)  < 3)$ $= 1 - P( T - E(T)  \geq 3)$ <p><b>D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :</b></p>

D. BENMAKHOUL

$P( T - E(T)  \geq 3) \leq \frac{V(T)}{3^2}$ $\Leftrightarrow P( T - E(T)  < 3) \geq 1 - \frac{V(T)}{9}$ $\Leftrightarrow P( T - E(T)  < 3) \geq 1 - \frac{3}{9}$ $\Leftrightarrow P( T - E(T)  < 3) \geq \frac{2}{3}$
--

<b>Ex.3</b>	
<b>1.a.</b>	$\vec{CA} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\vec{CD} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12,5 \end{pmatrix}$ $\vec{n}_1 \cdot \vec{CA} = \vec{n}_1 \cdot \vec{CD} = 0$ . $\vec{n}_1$ est un vecteur normal à (CAD).
<b>1.b.</b>	(CAD) : $1x - 1y + 0z + d = 0$ Comme $A \in (CAD)$ , on a $d = 0$ . D'où (CAD) : $x - y = 0$
<b>2.a.</b>	<b>Méthode 1 :</b> système d'équation on trouve $t = 1$ . <b>Méthode 2 :</b> vérifier par calcul que $H \in (CAD) \cap D$ .
<b>2.b.</b>	$\vec{BH} \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . $\vec{BH} = 2,5 \vec{n}_1$ . Et $H \in (CAD)$ . H est bien le projeté orthogonal de B sur (CAD).
<b>3.a.</b>	$\vec{BH} \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2,5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{AH} \begin{pmatrix} -2,5 \\ -2,5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ . ABH rectangle en H.

<b>3.b.</b>	$\text{Aire}(ABH) = \frac{AH \times BH}{2} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{25}{4} \text{ u. a.}$
<b>4.a.</b>	$\vec{CO} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \vec{AH} \begin{pmatrix} -2,5 \\ -2,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $= \vec{CO} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \vec{BH} \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2,5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$ <p><b>Méthode 1 :</b> De plus, A, B, H et O sont coplanaires car tous ont pour cote 0. Ils appartiennent tous au plan d'équation <math>z = 0</math> et de vecteur directeur <math>\vec{i}</math> et <math>\vec{j}</math>.  <b>Méthode 2 :</b> <math>\vec{OH} = \frac{1}{2} \vec{OA}</math> donc <math>O \in (AH)</math> et donc <math>O \in (ABH)</math>.            H est bien la hauteur du tétraèdre ABCH.         </p>
<b>4.b.</b>	$V(ABCH) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABH) \times CO$ $= \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 = \frac{125}{6} \text{ u.v.}$
<b>5.</b>	$V(ABCH) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABC) \times d(H; (ABC))$ $\Leftrightarrow \frac{125}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{25\sqrt{5}}{2} \times d(H; (ABC))$ $\Leftrightarrow d(H; (ABC)) = \sqrt{5} \text{ u.l.}$

<b>Ex.4.</b>	
<b>Partie A</b>	
<b>1.a.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty</math> (limite de ln)</li> <li><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty</math> (limite de x et ln)</li> </ul>

D. BENMAKHOUL

1.b.	$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}$
1.c.	$f$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ . (signe de $2x+1$ car $2x > 0$ )
1.d.	$f''(x) = -\frac{1}{2x^2}$ . Pour tout $x \in ]0; +\infty[$ , $f''(x) \leq 0$ . $f$ est concave sur $]0; +\infty[$ .
2.a.	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>f</math> est continue et est strictement croissante sur <math>]0; +\infty[</math>.</li> <li><math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty</math>   <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty</math></li> <li><math>0 \in \mathbb{R}</math>.</li> </ul> <p>Corollaire du TVI pour conclure.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>1 \leq f(\alpha) \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \alpha \leq 2</math> car <math>f</math> est croissante.</li> </ul>
2.b.	$f$ est négative sur $]0; \alpha]$ et positive sur $[\alpha; +\infty[$ .
2.c.	$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(\alpha) = 2 - \alpha \Leftrightarrow \ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$
<b>Partie B</b>	
1.	$g'(x) = -\frac{7}{8} \times 2x + 1 - \frac{1}{4} \left( 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \right)$ $= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x$ $= -2x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x.$ <ul style="list-style-type: none"> <li><math>xf\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)</math> <math>= 1 - 2x - \frac{1}{2}x \ln x = g'(x).</math></li> </ul>

2.a.	<p><b>Méthode 1 :</b> Pour tout <math>x \in ]0; \frac{1}{\alpha}[</math> on a <math>0 &lt; \alpha &lt; \frac{1}{x}</math> et par croissance de <math>f</math> sur <math>]0; +\infty[</math> donc <b>question A.1.c</b> et <b>question A.2.a</b> pour <math>f(\alpha) = 0</math>, on en déduit que</p> $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(\alpha) = 0.$ <p><b>Méthode 2 :</b> Si <math>x \in ]0; \frac{1}{\alpha}[</math> alors <math>0 &lt; \alpha &lt; \frac{1}{x}</math> et donc d'après la question <b>A.2.b</b>, <math>f\left(\frac{1}{x}\right) &gt; 0</math>.</p>																
2.b.	<p><math>g'(x)</math> est du même signe que <math>f\left(\frac{1}{x}\right)</math> sur <math>]0; 1[</math> car <math>x &gt; 0</math>.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>x</math></td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;"><math>\frac{1}{\alpha}</math></td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">signe de <math>f\left(\frac{1}{x}\right)</math></td> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">-</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">signe de <math>g'(x)</math></td> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">-</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>g</math></td> <td colspan="3" style="text-align: center;"> </td> </tr> </table>	$x$	0	$\frac{1}{\alpha}$	1	signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	+	0	-	signe de $g'(x)$	+	0	-	$g$			
$x$	0	$\frac{1}{\alpha}$	1														
signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	+	0	-														
signe de $g'(x)$	+	0	-														
$g$																	
<b>Partie C</b>																	
1.a.	$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2 \ln x.$ <p>Le signe de la différence est celui de <math>-\ln x</math>. D'où <math>C_g</math> est au-dessus de <math>P</math> sur <math>]0; 1[</math></p>																
1.b.	<p>Intégration par partie en posant :</p> $u(x) = \ln x \text{ donc } u'(x) = \frac{1}{x}$ $v'(x) = x^2 \text{ donc } v(x) = \frac{x^3}{3}$																

**D. BENMAKHOUF**

	$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} \ln x \right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 - \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \, dx$ $= \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} \text{ en utilisant } \ln \alpha = 2(2 - \alpha).$
2.	Multiplier par $-\frac{1}{4}$ car on doit intégrer sur $\left[\frac{1}{\alpha}; 1\right]$ l'expression : $g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2 \ln x.$ $A = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha}$