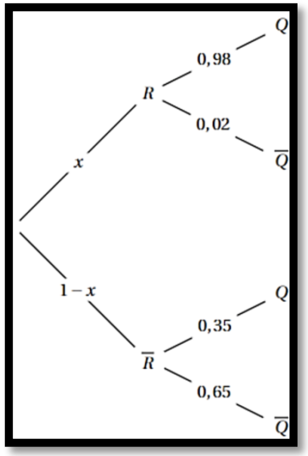
D. BENMAKHLOUF

Ex.1.	
1.	$P(Q) = 0{,}917$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0{,}65$.
2.a.	
2.b	R et $\bar{R}$ forment un système complet d'événements. Probas totales : $P(Q) = P(R \cap Q) + P(\bar{R} \cap Q)$ $\Leftrightarrow 0{,}917 = P(R) \times P_R(Q) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(Q)$ $\Leftrightarrow 0{,}917 = 0{,}98x + (1-x) \times 0{,}35$ $\Leftrightarrow x = 0{,}9$.
3.	On cherche à calculer $P_Q(R)$. $P_Q(R) = \dfrac{P(R \cap Q)}{P(Q)} = \dfrac{0{,}882}{0{,}917} \approx 0{,}962.$
4.	On cherche la note N_0 tel que $P(N \geq N_0) \geq 0{,}65$. • Si $N_0 = 11$, $P(N \geq 11) \approx 0{,}797 > 0{,}65$. • Si $N_0 = 12$, $P(N \geq 12) \approx 0{,}649 < 0{,}65$.
	Il faut une note supérieure ou égale à 11/20 pour être récompensé.
5.	Les variables aléatoires sont identiquement distribuées ($i.d.d$ =même loi) et sont indépendantes Par linéarité de l'espérance : $E(S) = E(N_1) + \ldots + E(N_{10})$ $= 10 \times E(N)$ car les variables sont $i.d.d$. $= 10 \times 20 \times 0{,}615 = 123$ car $E(N) = n \times p$ $V(S) = V(N_1) + \ldots + V(N_{10})$ car les v.a sont indéptes. $= 10 \times 123 \times (1 - 0{,}615)$ car $V(N) = np(1-p)$ $\approx 47{,}355$
6.a.	$M = \frac{S}{10}$ correspond à la note moyenne obtenue sur l'échantillon des 10 étudiants interrogé au hasard.
6.b.	$E(M) = E\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{1}{10}E(S) = 12{,}3$ par linéarité de l'espérance. $V(M) = V\left(\dfrac{S}{10}\right) = \dfrac{1}{10^2}V(S) = 0{,}47355$ En effet, pour a réel, $V(aX) = a^2V(X)$.
6.c.	$P(10{,}3 < M < 14{,}3)$ $= P(10{,}3 - 12{,}3 < M - E(M) < 14{,}3 - 12{,}3)$ $= P(-2 < M - E(M) < 2)$ $= P(\lvert M - E(M)\rvert < 2)$ $= 1 - P(\lvert M - E(M)\rvert \geq 2) \geq 1 - \frac{V(M)}{2^2}$ (Inégalité. B.T) Soit $P(10{,}3 \leq M \leq 14{,}3) \geq 0{,}882$. L'affirmation est correcte.

	Remarque : On peut bien évidemment utiliser <u>l'inégalité de concentration</u>. **On aboutira exactement au même résultat bien évidemment :** $P(10,3 < M < 14,3) = P(\lvert M - E(N)\rvert < 2)$ $= 1 - P(\lvert M - E(N)\rvert \geq 2) \geq \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{V(N)}}{\mathbf{10\times 2^2}}$ $$\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{V(N)}}{\mathbf{10 \times 2^2}} = 1 - \frac{12,3 \times (1 - 0,615)}{10 \times 2^2} \approx 0.1184$$ $$P(10,3 < M < 14,3) = 1 - 0.1184 \approx 0.882$$
Ex.2.	
Partie A.	
1.	$$\text{Taux} = \frac{m}{V} = \frac{15000}{50000} = 0,3\, mg.L^{-1}$$
2.	$P(n)$: « $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ » **Initialisation** : $v_0 \leq v_1 \leq 4$ En effet $v_0 = 0,7$ et $v_1 = 0,944$. $P(0)$ est vraie. **Hérédité** : On suppose la propriété vraie pour un entier k fixé. $P(k)$: « $v_k \leq v_{k+1} \leq 4$ » **(H.R)** On vise : « $v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 4$ » On part de : « $v_k \leq v_{k+1} \leq 4$ » **(H.R)** On multiplie par $0,92 > 0$. Donc conservation des inégalités : $$0,92v_k \leq 0,92v_{k+1} \leq 3,68$$

	On ajoute 0,3 : $$0,92v_k + 0,3 \leq 0,92v_{k+1} + 0,3 \leq 3,98 < 4$$ On a bien : $v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 4$. $\boldsymbol{P(k+1)}$ **est vraie.** **Conclure :** $\boldsymbol{P(0)}$ **est vraie et la propriété est héréditaire. Donc pour tout** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{v_n \leq v_{n+1} \leq 4}$.
2.b.	(v_n) est croissante et majorée par 4 donc est convergente en vertu du **théorème de convergence monotone.** Elle converge vers un réel $l \leq 4$. Par passage à la limite dans la relation de récurrence, on a : $$l = 0,92l + 0,3$$ D'où $l = 3,75$.
3.	NON, car $l = 3,75\ \mathrm{mg.L^{-1}} > 3\ \mathrm{mg.L^{-1}}$.

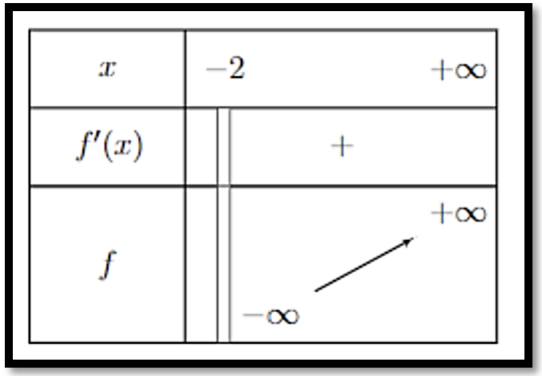
4.	<pre>def alerte_chlore(s) :
	        n=0
	        v=0.7
	        while v<=s :
	            n=n+1
	            v=0,92*v+0,3
	        return n</pre>

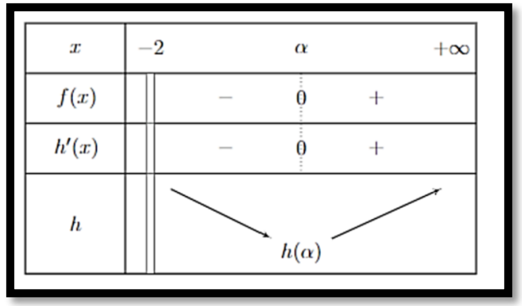
5.	$n = 17$. Le samedi 6 juillet 2024, le seuil préconisé sera dépasser soit 17 jours après le 19 juin 2024. A cette date, le taux de chlore ne sera pas conforme.
Partie B.	

1.	$(E) : y' = -0{,}08y + \frac{q}{50}$ avec $a = 0{,}08$ et $b = \frac{q}{50}$. $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a} \Rightarrow f(x) = Ce^{0{,}08x} - \frac{q}{4}$ où $C \in \mathbb{R}$
2.a.	Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} Ce^{-0{,}08x} = 0$, on en déduit que : $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{q}{4}.$$
2.b.	On doit résoudre : $\frac{q}{4} = 2$ soit $q = 8$. De plus, $f(0) = 0{,}7\ \text{mg.L}^{-1}$ donc $C = -1{,}3$. Ainsi, $\boldsymbol{f(x) = -1{,}3e^{-0{,}08x} + 2}$

Ex.3	
Partie A.	
1.	$f(-1) = -2$ et $f'(-1) = 1$ $f'(-1) = 1$ est le coefficient directeur de la tangente T
2.	Non, car au point d'abscisse environ $-1{,}2$ la tangente semble traverser la courbe. On a donc un point d'inflexion en ce point et donc un changement de convexité.
3.	Etant donné que la courbe semble couper l'axe des abscisses en un seul point, on peut conjecturer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle considéré. Notons α cette solution. $$\alpha \approx 0{,}1 \text{ à } 10^{-1}\text{près}$$
Partie B.	

1.	**En** $-\infty$: On pose $X = x + 2$. Lorsque x tend vers -2^+, X tend vers 0^+. $$\lim_{x \to -2^+} \ln(x+2) = \lim_{X \to 0^+} \ln X = -\infty.$$ Au final, au vu des termes restants, on a : $$\boldsymbol{\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty.}$$ **En** $+\infty$: On pose $X = x + 2$. Lorsque x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$. $$\lim_{x \to \mp\infty} \ln(x+2) = \lim_{X \to +\infty} \ln X = +\infty.$$ Au final, au vu des termes restants, on a : $$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$
2.	$f'(x) = (x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2))'$ $= 2x + 2 + \frac{(x+2)'}{x+2}$ $\quad \ln u = \frac{u'}{u}$ pour $u > 0$. $= \frac{2x^2+6x+5}{x+2}$ pour $x > -2$.
3.	Sur $]-2; +\infty[$, $f'(x)$ est du même signe que : $$\boldsymbol{2x^2 + 6x + 5} \text{ car } x + 2 > 0$$ $\boldsymbol{\Delta = -4 < 0} \Rightarrow$ **pas de racine pour le trinôme du** $\boldsymbol{2^{nd}}$ degré. Ce trinôme est à valeur strictement positive donc $f'(x)$ aussi. f est donc strictement croissante sur son ensemble de définition.

	
4.	• f est continue et est strictement croiussante sur $]-2;+\infty[$. • $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$. et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. • $0 \in \mathbb{R}$. Conclure avec le corollaire du TVI. $\boldsymbol{\alpha \approx 0,12}$
5.	f est négative sur $]-2;\alpha]$ et est positive sur $[\alpha;+\infty[$.
6.	$f"(x) = \dfrac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$ Sur $]-2\,;+\infty[$, $f"$ s'annule en $\frac{\sqrt{2}-4}{2}$. • $]-2\,;\frac{\sqrt{2}-4}{2}[$, f est concave. • $]\frac{\sqrt{2}-4}{2}\,;+\infty[$, f est convexe. • Point d'inflexion en $\frac{\sqrt{2}-4}{2}$.
Partie C.	

1.	$h(x) = JM^2 = (x_M - x_J)^2 + (y_M - y_j)^2$ $= (x-0)^2 + (g(x)-1)^2$ $= x^2 + (\ln(x+2)-1)^2$
2.a.	$h'(x)$ est du même signe que $f(x)$ sur $]-2\,;+\infty[$. h est donc décroissante sur $]-2\,;\alpha[$ puis croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$. 
2.b.	Comme $h(x) = JM^2$, JM est minimale lorsque h est minimale. Cela se produit lorsque $x = \alpha$ d'après la question précédente.
3.a.	En ce point M_α d'abscisse α, la dérivée h' s'annule car h admet un minimum en cette valeur α d'après la question précédente. Ainsi, $h'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{2f(\alpha)}{\alpha+2} = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$ $\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha+2) = 0$ $\Leftrightarrow \ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.
3.b.	**Méthode 1.** On doit établir l'égalité : $\boldsymbol{g'(\alpha) \times \dfrac{g(\alpha)-1}{\alpha} = -1}$ • $g'(\alpha)$ désigne le coefficient directeur de la tangente à C_g au point d'abscisse α

<table>
<tr><td></td><td>

- $\frac{g(\alpha)-1}{\alpha}$ désigne le coefficient directeur de la droite (JM_α)

$$g'(\alpha)\times\frac{g(\alpha)-1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha+2}\times\frac{\ln(\alpha+2)-1}{\alpha}$$
$$=\frac{1}{\alpha+2}\times\frac{-2\alpha-\alpha^2}{\alpha}$$
$$=\frac{1}{\alpha+2}\times\frac{-\alpha(\alpha+2)}{\alpha}$$
$$=-1$$

Méthode 2. On aurait pu démontrer simplement la colinéarité d'un vecteur normal à la tangente T_α (= tangente à C_g en M_α) avec $\overrightarrow{JM_\alpha}$. Cela implique d'utiliser l'équation réduite puis de revenir à l'équation cartésienne pour extraire ses coordonnées.
Détails :

$y=g'(\alpha)(x-\alpha)+g(\alpha)$ qui correspond à l'éqn réduite
$\Leftrightarrow y=\frac{1}{\alpha+2}(x-\alpha)+\ln(\alpha+2)$
$\Leftrightarrow -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{2}}x+\mathbf{1}y+\frac{\alpha}{\alpha+2}-\ln(\alpha+2)=0$ qui correspond à l'éqn cartésienne de la droite donc de la forme $ax+by+c=0$.
où $\overrightarrow{n_\alpha}\binom{a}{b}$ désigne les coordonnées d'un vecteur normal et $\overrightarrow{u_\alpha}\binom{-b}{a}$ désigne les coordonnées d'un vecteur directeur.

Le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{n_\alpha}}\begin{pmatrix}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{2}}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de T_α.
D'autre part, $\overrightarrow{JM_\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ g(\alpha)-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{JM_\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \ln(\alpha+2)-1\end{pmatrix}$

Ou encore mieux $\overrightarrow{\boldsymbol{JM_\alpha}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ -\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{2})\end{pmatrix}$.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>

On constate que : $\overrightarrow{\boldsymbol{JM_\alpha}}=-\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{2})\overrightarrow{\boldsymbol{n_\alpha}}$.

Conclusion : $\overrightarrow{\boldsymbol{JM_\alpha}}$ **et** $\overrightarrow{\boldsymbol{n_\alpha}}$ **étant colinéaires,** $(\boldsymbol{JM_\alpha})\perp(\boldsymbol{T_\alpha})$.

Méthode 3. On aurait pu utiliser la formule analytique du produit scalaire dans le plan, en montrant simplement l'orthogonalité d'un vecteur directeur de la tangente T_α avec $\overrightarrow{JM_\alpha}$.
Détails :
Le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{u_\alpha}}\begin{pmatrix}-\mathbf{1}\\ -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{2}}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T_α.

$$\overrightarrow{u_\alpha}\cdot\overrightarrow{JM_\alpha}=\begin{pmatrix}-\mathbf{1}\\ -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{ln}(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{2})-\mathbf{1}\end{pmatrix}=0$$

Conclusion : $\overrightarrow{\boldsymbol{JM_\alpha}}$ **et** $\overrightarrow{\boldsymbol{n_\alpha}}$ **étant orthogonaux,** $(\boldsymbol{JM_\alpha})\perp(\boldsymbol{T_\alpha})$

- ⇨ **Remarque :** Pour avoir les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente, on aurait pu considérer $\overrightarrow{u_\alpha}\begin{pmatrix}1\\ g'(\alpha)\end{pmatrix}$. Cela évite d'aller chercher l'équation cartésienne de (T_α).
- ⇨ De même, Pour avoir les coordonnées d'un vecteur normal à la tangente, on aurait pu considérer $\overrightarrow{u_\alpha}\begin{pmatrix}-g'(\alpha)\\ 1\end{pmatrix}$. Cela évite également d'aller chercher l'équation cartésienne de (T_α).
</td></tr>
</table>

Ex.4.	
AFFIRMATION1	A, C, D définissent le plan d'éqn $8x-5y+4z-16=0$ si et seulement si les coordonnées de ces points vérifient l'équation cartésienne de ce plan.

	Pour A : $8\times 2-5\times 0+4\times 0-16=0$. Pour C : $8\times 4-5\times 4+4\times 1-16=0$. Pour D : $8\times 0-5\times 0+4\times 4-16=0$. **VRAIE**
AFFIRMATION2	**Méthode 1 :** Vu que A, C et D sont dans un même plan, il suffit de de vérifier que B est également dans ce plan. On raisonne de la même manière que précédemment. Pour B : $8\times 0-5\times 4+4\times 3-16\neq 0$. **Méthode 2 :** On cherche s'ils existent $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$ Après être passé aux coordonnées et avoir résolu le système, on arrive à $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$ soit deux valeurs distinctes pour b ce qui indique que le système n'a pas de solution. **FAUX**
AFFIRMATION3	**Méthode 1 :** On établit les représentations paramétriques des droites et on égalise ligne à ligne : $$\begin{cases} 2+2t=-k \\ 4t=4-3k \\ t=3-k\end{cases}$$ On trouve : $(t\,;k)=(-5\,;8)$ Ce système ayant une solution qui est le couple précédent. Les droites sont bien sécantes.

	Méthode 2 : On peut remarquer que (AB) et (BH) sont coplanaires. *Petite subtilité qui a pu échapper à beaucoup par précipitation sur le système ...* $$(\boldsymbol{AB})\subset(\boldsymbol{ABC})\text{ et }(\boldsymbol{BH})\subset(\boldsymbol{ABC})$$ **En effet, $H\in(ABC)$ car H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. **Les droites étant coplanaires non parallèles, elles sont donc sécantes !** **VRAIE**
AFFIRMATION4	**Vérifions déjà si $\overrightarrow{DH}$ est colinéaire au vecteur normal au plan $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.** $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DH}=-\vec{n}$. $\overrightarrow{DH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. **Vérifions maintenant si $H\in(ABC)$.** $$x_H-y_H+2z_H-2=-1-1+4-2=0$$ On a bien $H\in(ABC)$. **VRAIE**