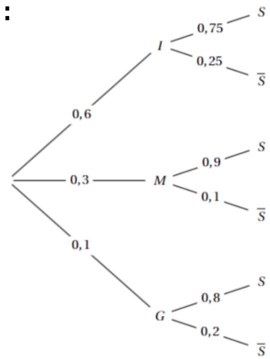
D. BENMAKHLOUF

Ex.1.	
1.	$$f(x) = 5xe^{-x} = \frac{5x}{e^x} = 5 \times \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$$ **Par produit/quotient/croissances comparées :** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ est ASH en$+\infty$. **VRAIE**
2.	$f'(x) + f(x) = (5xe^{-x})' + 5xe^{-x}$ $= 5e^{-x} - 5xe^{-x} + 5xe^{-x}$ $= 5e^{-x} \Rightarrow f$ solution. **VRAIE**
3.	$u_n = -1 - \frac{1}{n+1} \qquad w_n = 1 + \frac{1}{n+1} \qquad v_n = (-1)^n$ (u_n) est croissante. (w_n) est décroissante et pourtant (v_n) ne converge pas. **FAUX.** **Remarque : les suites constantes** $u_n = -1$ et $w_n = 1$ conviennent également. On aurait pu prendre également $v_n = \cos n$ ou $v_n = \sin n$
4.	**Méthode 1 :** Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et (u_n) croissante, (w_n) décroissante alors (u_n) est minorée par u_0 et (w_n) est majorée par w_0. Il en va de même pour (v_n). **VRAIE** **Méthode 2 :** Une récurrence immédiate **en raison des variations** fournis donne : $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq w_2 \leq w_1 \leq w_0$
Ex.2.	

1.	ARBRE : 
2.	$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$
3.	I, M et S forment un système complet d'événement. Probas totales : $P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S) = 0{,}8.$
4.	$P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}45}{0{,}8} \approx 0{,}563.$
5. a.	1. Epreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}8$. 2. Schéma de Bernoulli de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}8$. 3. $X \sim B(30; 0{,}8)$
5. b.	$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \approx 0{,}428$
6.	**Méthode 1 :** On cherche n tel que $P(X \leq n-1) \geq 0{,}99$ $\Leftrightarrow 1 - P(X = n) \geq 0{,}99$ $\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{n} \times 0{,}8^n \times 0{,}2^{n-n} \geq 0{,}99$ $\Leftrightarrow 0{,}8^n \leq 0{,}01$ $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$ soit $n \geq 21$.

	Méthode 2 : On peut éventuellement définir une nouvelle variable aléatoire Y qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients insatisfaits du service clientèle. Y suit une loi binomiale de paramètres $B(30;0{,}2)$. On cherche n tel que $P(Y\geq 1)\geq 0{,}99$. $\Leftrightarrow 1-P(Y=0)\geq 0{,}99$ $\Leftrightarrow 1-\binom{n}{0}\times 0{,}2^0\times 0{,}8^{n-0}\geq 0{,}99$ $\Leftrightarrow 0{,}8^n\leq 0{,}01$ $\Leftrightarrow n\geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$ soit $n\geq 21$.
7. a.	Par linéarité de l'espérance, $E(T)=E(T_1)+E(T_2)=7$ jours en moyenne pour recevoir la commande à son domicile. Par indépendance de T_1 et T_2, $V(T_1+T_2)=V(T_1)+V(T_2)=3.$
7.b.	$P(T\in[5;9])=P(4<T<10)$ $=P(-3<T-E(T)<3)$ $=P(\|T-E(T)\|<3)$ $=1-P(\|T-E(T)\|\geq 3)$ **D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : $P(\|T-E(T)\|\geq 3)\leq \frac{V(T)}{3^2}$ $\Leftrightarrow P(\|T-E(T)\|<3)\geq 1-\frac{V(T)}{9}$ $\Leftrightarrow P(\|T-E(T)\|<3)\geq 1-\frac{3}{9}$ $\Leftrightarrow P(\|T-E(T)\|<3)\geq \frac{2}{3}$.

Ex.3	
1.a.	$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-12{,}5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CD}=0.$ $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur normal à (CAD).
1.b	$(CAD): 1x-1y+0z+d=0$ Comme $A\in(CAD)$, on a $d=0$. D'où $(CAD): x-y=0$
2.a.	**Méthode 1 :** système d'équation on trouve $\boldsymbol{t=1}$. **Méthode 2 :** vérifier par le calcul que $\boldsymbol{H\in(CAD)\cap D}$.
2.b.	$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}2{,}5\\-2{,}5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{BH}=2{,}5\,\overrightarrow{n_1}$. **Et** $H\in(CAD)$. H est bien le projeté orthogonal de B sur (CAD).
3.a.	$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}2{,}5\\-2{,}5\\0\end{pmatrix}.\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-2{,}5\\-2{,}5\\0\end{pmatrix}=0.$ ABH rectangle en H.
3.b.	$Aire(ABH)=\frac{AH\times BH}{2}=\frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{25}{4}\ u.a.$
4.a.	$\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix}.\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-2{,}5\\-2{,}5\\0\end{pmatrix}$

	$=\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix}.\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}2,5\\-2,5\\0\end{pmatrix}=0.$ **Méthode 1 :** De plus, A, B, H et O sont coplanaires car tous ont pour cote 0. Ils appartiennent tous au plan d'équation $z=0$ et de vecteurs directeurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. **Méthode 2 :** $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ donc $O\in(AH)$ et donc $O\in(ABH)$. H est bien la hauteur du tétraèdre $ABCH$.
4.b.	$V(ABCH)=\dfrac{1}{3}\times Aire(ABH)\times CO$ $=\frac{1}{3}\times\frac{25}{4}\times 10=\frac{125}{6}\ u.v.$
5.	**Méthode 1 :** $V(ABCH)=\dfrac{1}{3}\times Aire(ABC)\times d\big(H;(ABC)\big)$ $\Leftrightarrow \dfrac{125}{6}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{25\sqrt{5}}{2}\times d\big(H;(ABC)\big)$ $\Leftrightarrow d\big(H;(ABC)\big)=\sqrt{5}\ u.l.$ **Méthode 2 HORS PROGRAMME** : $$d\big(H;(ABC)\big)=\frac{\lvert ax_H+by_H+cz_H+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ Où $ax+by+cz+d=0$ correspond à l'équation cartésienne de (ABC). Pour trouver un vecteur normal au plan (ABC) il suffit de déterminer les coordonnées de deux vecteurs non colinéaires de (ABC) et d'en calculer le produit vectoriel. $$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-50\\-25\end{pmatrix}$$ Le vecteur $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ convient car colinéaire à $\begin{pmatrix}0\\-50\\-25\end{pmatrix}$. C'est un vecteur normal à (ABC). Ici $d=-10$. Ainsi : $d\big(H;(ABC)\big)=\dfrac{\lvert ax_H+by_H+cz_H+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ $=\dfrac{\lvert 0\times 2,5+2\times 2,5+1\times 0-10\rvert}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}}$ $=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\ u.l.$

Ex.4.	
Partie A	
1.a.	• $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ (limite de ln) • $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (limite de x et ln)
1.b.	$$f'(x)=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}=1+\frac{1}{2x}=\frac{2x+1}{2x}$$

1.c	f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. En effet, sur $]0\,;+\infty[$, $2x+1>0$ et $2x>0$.
1.d.	$f''(x) = -\frac{1}{2x^2}$. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f''(x) \leq 0$. Par conséquent, f est concave sur $]0;+\infty[$.
2.a.	• f est continue et est strict croissante sur $]0;+\infty[$. • $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ • $0 \in \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$ Corollaire du TVI pour conclure. • $f(1) \leq f(\alpha) \leq f(2)$ avec $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$ $\Rightarrow\ 1 \leq \alpha \leq 2$
2.b.	f est négative sur $]0;\alpha]$ et positive sur $[\alpha;+\infty[$.
2.c.	$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2-\alpha \Leftrightarrow \ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$
Partie B	
1.	$g'(x) = -\frac{7}{8}\times 2x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x}\right)$ $=-\frac{8}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x$ $= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x.$ • $xf\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ $= 1 - 2x - \frac{1}{2}x\ln x = g'(x).$

2.a.	**Méthode 1 :** Pour tout $x \in]0\,;\frac{1}{\alpha}[$ on a $0 < \alpha < \frac{1}{x}$ et par croissance de f sur $]0;+\infty[$ donc **question A.1.c et question A.2.a** pour $f(\alpha)=0$, on en déduit que $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(\alpha) = 0.$ **Méthode 2 :** Si $x \in]0\,;\frac{1}{\alpha}[$ alors $0 < \alpha < \frac{1}{x}$ et donc d'après la question **A.2.b,** $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.
2.b.	$g'(x)$ est du même signe que $f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0;1[$ car $x>0$.
Partie C	
1.a.	$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2\ln x.$ Le signe de la différence est celui de $-\ln x$ qui est ≥ 0 sur $]0;1]$ car $\ln x \leq 0$ sur cet intervalle bien évidemment. D'où C_g est au-dessus de P sur $]0;1]$

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	||	$+$	0	$-$	
signe de $g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
g	||	$\nearrow$		$\searrow$	

1.b.	Intégration par parties en considérant u et v deux fonctions dérivables sur $]0;1]$ et dont les dérivées sont continues (fonction de classe C^1). On pose : $u(x) = \ln x$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ $v'(x) = x^2$ donc $v(x) = \frac{x^3}{3}$ $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \; dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \; dx$ $= \frac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}$ en utilisant $\ln \alpha = 2(2-\alpha)$.
2.	Multiplier par $-\frac{1}{4}$ car on doit intégrer sur $\left[\frac{1}{\alpha};1\right]$ l'expression : $g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2 \ln x \geq 0$ $A = \frac{\alpha^3+6\alpha-13}{36\alpha}$