Corrigé de l'épreuve du baccalauréat de spécialité mathématiques

Amérique du nord
22 mai 2025

http://specialite.mathematiques.free.fr/
fabien.vinsu@ac-besancon.fr

Exercice 1 - Partie A

Exercice 1 - Partie A

1. On répète 15 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à $0,32$.

1. On répète 15 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à $0,32$. La variable aléatoire N est égale au nombre de succès donc :

1. On répète 15 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à $0,32$. La variable aléatoire N est égale au nombre de succès donc :

$$\boxed{N \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 15 \text{ et } p = 0,32}$$

2. Il s'agit de calculer $P(X = 4)$.

2. Il s'agit de calculer $P(X = 4)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice que la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série est :

2. Il s'agit de calculer $P(X = 4)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice que la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série est :

$$\boxed{P(X = 4) \approx 0,206}$$

3. Il s'agit de calculer $P(X \leqslant 6)$.

3. Il s'agit de calculer $P(X \leqslant 6)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice que la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série est :

3. Il s'agit de calculer $P(X \leqslant 6)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice que la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série est :

$$\boxed{P(X \leqslant 6) \approx 0,828}$$

4. L'espérance de N est $E(N) =$

4. L'espérance de N est $E(N) = n \times p$

4. L'espérance de N est $E(N) = n \times p = 15 \times 0,32$

4. L'espérance de N est $E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = 4,8$

4. L'espérance de N est $E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = 4,8$, soit :

$$\boxed{E(N) = 4,8}$$

5. (a) Chaque panier réussi rapporte 3 points

5. (a) Chaque panier réussi rapporte 3 points donc le nombre de points marqués est égal à $N \times 3$,

5. (a) Chaque panier réussi rapporte 3 points donc le nombre de points marqués est égal à $N \times 3$, soit :

$$\boxed{T = 3N}$$

5. (b) Par linéarité de l'espérance, on a
$E(T) =$

5. (b) Par linéarité de l'espérance, on a
$E(T) = E(3N)$

5. (b) Par linéarité de l'espérance, on a
$E(T) = E(3N) = 3E(N)$

5. (b) Par linéarité de l'espérance, on a
$E(T) = E(3N) = 3E(N) = 3 \times 4,8$

5. (b) Par linéarité de l'espérance, on a
$E(T) = E(3N) = 3E(N) = 3 \times 4,8 = 14,4,$

5. (b) Par linéarité de l'espérance, on a
$E(T) = E(3N) = 3E(N) = 3 \times 4,8 = 14,4$, soit :

$$\boxed{E(T) = 14,4}$$

5. (b) Par linéarité de l'espérance, on a
$E(T) = E(3N) = 3E(N) = 3 \times 4,8 = 14,4$, soit :

$$\boxed{E(T) = 14,4}$$

Cela signifie, qu'en moyenne, Victor marque 14,4 points par série.

5. (c) On a :

$$P(12 \leqslant T \leqslant 18) =$$

5. (c) On a :

$$P(12 \leqslant T \leqslant 18) = P(12 \leqslant 3N \leqslant 18)$$

5. (c) On a :

$$\begin{aligned} P(12 \leqslant T \leqslant 18) &= P(12 \leqslant 3N \leqslant 18) \\ &= P(4 \leqslant N \leqslant 6) \end{aligned}$$

5. (c) On a :

$$\begin{aligned} P(12 \leqslant T \leqslant 18) &= P(12 \leqslant 3N \leqslant 18) \\ &= P(4 \leqslant N \leqslant 6) \end{aligned}$$

On obtient alors, à l'aide de la calculatrice $P(4 \leqslant N \leqslant 6) \approx 0,586$,

5. (c) On a :

$$\begin{aligned} P(12 \leqslant T \leqslant 18) &= P(12 \leqslant 3N \leqslant 18) \\ &= P(4 \leqslant N \leqslant 6) \end{aligned}$$

On obtient alors, à l'aide de la calculatrice $P(4 \leqslant N \leqslant 6) \approx 0,586$, soit :

$$\boxed{P(12 \leqslant T \leqslant 18) \approx 0,586}$$

Partie B

1. (a) La variable aléatoire M_{50} représente :

1. (a) La variable aléatoire M_{50} représente :

$\boxed{\text{Le nombre moyen de points par match marqués au cours des 50 premiers matchs}}$

1. (b) D'après le cours, on a $E(M_{50}) =$

1. (b) D'après le cours, on a $E(M_{50}) = E(X)$

1. (b) D'après le cours, on a $E(M_{50}) = E(X) = 22$

1. (b) D'après le cours, on a $E(M_{50}) = E(X) = 22$ et
$V(M_{50}) =$

1. (b) D'après le cours, on a $E(M_{50}) = E(X) = 22$ et $V(M_{50}) = \dfrac{1}{50} V(X)$

1. (b) D'après le cours, on a $E(M_{50}) = E(X) = 22$ et
$V(M_{50}) = \dfrac{1}{50} V(X) = \dfrac{65}{50}$

1. (b) D'après le cours, on a $E(M_{50}) = E(X) = 22$ et
$V(M_{50}) = \frac{1}{50} V(X) = \frac{65}{50} = 1,3,$

1. (b) D'après le cours, on a $E(M_{50}) = E(X) = 22$ et $V(M_{50}) = \frac{1}{50} V(X) = \frac{65}{50} = 1,3$, soit :

$$\boxed{E(M_{50}) = 22} \quad \text{et} \quad \boxed{V(M_{50}) = 1,3}$$

1. (c) D'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_{50}, on a :

1. (c) D'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_{50}, on a :

$$P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{50 \times 3^2}$$

1. (c) D'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_{50}, on a :

$$P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{50 \times 3^2}$$

Or $\dfrac{V(X)}{50 \times 3^2} =$

1. (c) D'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_{50}, on a :

$$P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{50 \times 3^2}$$

Or $\dfrac{V(X)}{50 \times 3^2} = \dfrac{65}{450}$

1. (c) D'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_{50}, on a :

$$P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{50 \times 3^2}$$

Or $\dfrac{V(X)}{50 \times 3^2} = \dfrac{65}{450} = \dfrac{13}{90}$,

1. (c) D'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_{50}, on a :

$$P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{50 \times 3^2}$$

Or $\dfrac{V(X)}{50 \times 3^2} = \dfrac{65}{450} = \dfrac{13}{90}$, d'où :

$$\boxed{P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{13}{90}}$$

1. (d) On a alors, en passant à l'événement contraire :

1. (d) On a alors, en passant à l'événement contraire :

$$P(|M_{50} - 22| < 3) \geqslant 1 - \frac{13}{90}$$

1. (d) On a alors, en passant à l'événement contraire :

$$P(|M_{50} - 22| < 3) \geqslant 1 - \frac{13}{90}$$

Soit :

$$P(19 < M_{50} < 25) \geqslant \frac{77}{90}$$

1. (d) On a alors, en passant à l'événement contraire :

$$P(|M_{50} - 22| < 3) \geqslant 1 - \frac{13}{90}$$

Soit :

$$P(19 < M_{50} < 25) \geqslant \frac{77}{90}$$

Or $\frac{77}{90} \approx 0,8556$

1. (d) On a alors, en passant à l'événement contraire :

$$P(|M_{50} - 22| < 3) \geqslant 1 - \frac{13}{90}$$

Soit :

$$P(19 < M_{50} < 25) \geqslant \frac{77}{90}$$

Or $\frac{77}{90} \approx 0,8556$ d'où, a fortiori :

$$\boxed{P(19 < M_{50} < 25) \geqslant 0,85}$$

2. L'affirmation est fausse.

2. L'affirmation est fausse. En effet, d'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_n, on a :

2. L'affirmation est fausse. En effet, d'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_n, on a :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 3^2}$$

2. L'affirmation est fausse. En effet, d'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_n, on a :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 3^2}$$

Soit :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{65}{9n}$$

2. L'affirmation est fausse. En effet, d'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_n, on a :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 3^2}$$

Soit :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{65}{9n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{65}{9n} = 0$

2. L'affirmation est fausse. En effet, d'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_n, on a :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 3^2}$$

Soit :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{65}{9n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{65}{9n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 22| \geqslant 3) = 0$,

2. L'affirmation est fausse. En effet, d'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_n, on a :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 3^2}$$

Soit :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{65}{9n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{65}{9n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 22| \geqslant 3) = 0$, il existe donc un entier n tel que $P(|M_n - 22| \geqslant 3) < 0,01$.

2. L'affirmation est fausse. En effet, d'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_n, on a :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 3^2}$$

Soit :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{65}{9n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{65}{9n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 22| \geqslant 3) = 0$, il existe donc un entier n tel que $P(|M_n - 22| \geqslant 3) < 0,01$.
Déterminons un tel entier :

2. L'affirmation est fausse. En effet, d'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_n, on a :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 3^2}$$

Soit :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{65}{9n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{65}{9n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 22| \geqslant 3) = 0$, il existe donc un entier n tel que $P(|M_n - 22| \geqslant 3) < 0,01$.
Déterminons un tel entier :

$$\frac{65}{9n} < 0,01 \Longleftrightarrow$$

2. L'affirmation est fausse. En effet, d'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_n, on a :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 3^2}$$

Soit :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{65}{9n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{65}{9n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 22| \geqslant 3) = 0$, il existe donc un entier n tel que $P(|M_n - 22| \geqslant 3) < 0,01$.

Déterminons un tel entier :

$$\frac{65}{9n} < 0,01 \iff \frac{9n}{65} > 100 \quad \textit{(passage à l'inverse)}$$

2. L'affirmation est fausse. En effet, d'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_n, on a :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 3^2}$$

Soit :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{65}{9n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{65}{9n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 22| \geqslant 3) = 0$, il existe donc un entier n tel que $P(|M_n - 22| \geqslant 3) < 0,01$.

Déterminons un tel entier :

$$\frac{65}{9n} < 0,01 \iff \frac{9n}{65} > 100 \quad \textit{(passage à l'inverse)}$$

$$\iff 9n > 6\,500$$

2. L'affirmation est fausse. En effet, d'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_n, on a :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 3^2}$$

Soit :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{65}{9n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{65}{9n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 22| \geqslant 3) = 0$, il existe donc un entier n tel que $P(|M_n - 22| \geqslant 3) < 0,01$.
Déterminons un tel entier :

$$\begin{aligned} \frac{65}{9n} < 0,01 &\iff \frac{9n}{65} > 100 \quad \textit{(passage à l'inverse)} \\ &\iff 9n > 6\,500 \\ &\iff n > \frac{6\,500}{9} \end{aligned}$$

2. L'affirmation est fausse. En effet, d'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_n, on a :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 3^2}$$

Soit :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{65}{9n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{65}{9n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 22| \geqslant 3) = 0$, il existe donc un entier n tel que $P(|M_n - 22| \geqslant 3) < 0,01$.
Déterminons un tel entier :

$$\begin{aligned} \frac{65}{9n} < 0,01 &\iff \frac{9n}{65} > 100 \quad \textit{(passage à l'inverse)} \\ &\iff 9n > 6\,500 \\ &\iff n > \frac{6\,500}{9} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{6\,500}{9} \approx 722,2$

2. L'affirmation est fausse. En effet, d'après l'inégalité de concentration, appliquée à la variable aléatoire M_n, on a :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 3^2}$$

Soit :

$$P(|M_n - 22| \geqslant 3) \leqslant \frac{65}{9n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{65}{9n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 22| \geqslant 3) = 0$, il existe donc un entier n tel que $P(|M_n - 22| \geqslant 3) < 0,01$.

Déterminons un tel entier :

$$\begin{aligned} \frac{65}{9n} < 0,01 &\iff \frac{9n}{65} > 100 \quad \textit{(passage à l'inverse)} \\ &\iff 9n > 6\,500 \\ &\iff n > \frac{6\,500}{9} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{6\,500}{9} \approx 722,2$ donc on a :

$$\boxed{P(|M_{723} - 22| \geqslant 3) < 0,01}$$

1. (a) On a :

$$\boxed{u_1 = \sqrt{2}}$$

1. (a) On a :

$$\boxed{u_1 = \sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_2 = \sqrt{\sqrt{2}}}$$

1. (b) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

1. (b) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

   - $u_0 = 2$

1. (b) À l'aide de la calculatrice, on obtient :
   - $u_0 = 2$
   - $u_1 \approx 1,4142$

1. (b) À l'aide de la calculatrice, on obtient :
   - $u_0 = 2$
   - $u_1 \approx 1,4142$
   - $u_2 \approx 1,1892$

1. (b) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

- $u_0 = 2$
- $u_1 \approx 1,4142$
- $u_2 \approx 1,1892$
- $u_3 \approx 1,0905$

1. (b) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

- $u_0 = 2$
- $u_1 \approx 1,4142$
- $u_2 \approx 1,1892$
- $u_3 \approx 1,0905$
- $u_4 \approx 1,0443$

1. (b) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

- $u_0 = 2$
- $u_1 \approx 1,4142$
- $u_2 \approx 1,1892$
- $u_3 \approx 1,0905$
- $u_4 \approx 1,0443$
- $u_5 \approx 1,0219$

1. (b) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

- $u_0 = 2$
- $u_1 \approx 1,4142$
- $u_2 \approx 1,1892$
- $u_3 \approx 1,0905$
- $u_4 \approx 1,0443$
- $u_5 \approx 1,0219$
- ...

On peut conjecturer que :

1. (b) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

- $u_0 = 2$
- $u_1 \approx 1,4142$
- $u_2 \approx 1,1892$
- $u_3 \approx 1,0905$
- $u_4 \approx 1,0443$
- $u_5 \approx 1,0219$
- ...

On peut conjecturer que :

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$

1. (b) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

- $u_0 = 2$
- $u_1 \approx 1,4142$
- $u_2 \approx 1,1892$
- $u_3 \approx 1,0905$
- $u_4 \approx 1,0443$
- $u_5 \approx 1,0219$
- ...

On peut conjecturer que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n,
$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $u_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $u_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142$. On a donc $1 \leqslant u_2 \leqslant u_1$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $u_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142$. On a donc $1 \leqslant u_2 \leqslant u_1$. La propriété est vraie au rang $n = 1$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $u_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142$. On a donc $1 \leqslant u_2 \leqslant u_1$. La propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $u_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142$. On a donc $1 \leqslant u_2 \leqslant u_1$. La propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$,

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $u_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142$. On a donc $1 \leqslant u_2 \leqslant u_1$. La propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $u_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142$. On a donc $1 \leqslant u_2 \leqslant u_1$. La propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. On a alors, par croissance de la fonction racine :

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $u_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142$. On a donc $1 \leqslant u_2 \leqslant u_1$. La propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. On a alors, par croissance de la fonction racine :

$$\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$$

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $u_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142$. On a donc $1 \leqslant u_2 \leqslant u_1$. La propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. On a alors, par croissance de la fonction racine :

$$\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$$

  Soit :

$$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $u_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142$. On a donc $1 \leqslant u_2 \leqslant u_1$. La propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. On a alors, par croissance de la fonction racine :

  $$\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$$

  Soit :

  $$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $u_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142$. On a donc $1 \leqslant u_2 \leqslant u_1$. La propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. On a alors, par croissance de la fonction racine :
  $$\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$$
  Soit :
  $$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$
  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $u_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142$. On a donc $1 \leqslant u_2 \leqslant u_1$. La propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. On a alors, par croissance de la fonction racine :

  $$\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$$

  Soit :

  $$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie au rang $n = 1$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (b) D'après la question précédente :

2. (b) D'après la question précédente :

- La suite (u_n) est décroissante

2. (b) D'après la question précédente :

- La suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

2. (b) D'après la question précédente :

- La suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)
- La suite (u_n) est minorée par 1

2. (b) D'après la question précédente :

- La suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)
- La suite (u_n) est minorée par 1 (car $1 \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

2. (b) D'après la question précédente :

- La suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)
- La suite (u_n) est minorée par 1 (car $1 \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

La suite (u_n) étant décroissante et minorée, on en déduit que :

2. (b) D'après la question précédente :

- La suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)
- La suite (u_n) est minorée par 1 (car $1 \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

La suite (u_n) étant décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

2. (c) Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a :

2. (c) Pour tout $x \in [0\,; +\infty[$, on a :

$$\sqrt{x} = x \iff$$

2. (c) Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a :

$$\sqrt{x} = x \Longleftrightarrow x = x^2$$

2. (c) Pour tout $x \in [0\,; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x} = x &\iff x = x^2 \\ &\iff x - x^2 = 0 \end{aligned}$$

2. (c) Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x} = x &\iff x = x^2 \\ &\iff x - x^2 = 0 \\ &\iff x(1-x) = 0\end{aligned}$$

2. (c) Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x} = x &\iff x = x^2\\ &\iff x - x^2 = 0\\ &\iff x(1-x) = 0\\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1\end{aligned}$$

2. (c) Pour tout $x \in [0\,; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x} = x &\iff x = x^2 \\ &\iff x - x^2 = 0 \\ &\iff x(1-x) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1\end{aligned}$$

L'équation $\sqrt{x} = x$ admet pour ensemble de solutions sur $[0\,; +\infty[$:

2. (c) Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x} = x &\Longleftrightarrow x = x^2\\ &\Longleftrightarrow x - x^2 = 0\\ &\Longleftrightarrow x(1-x) = 0\\ &\Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1\end{aligned}$$

L'équation $\sqrt{x} = x$ admet pour ensemble de solutions sur $[0\,;+\infty[$:

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\,;\,1\}}$$

2. (d) La suite (u_n) étant définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$

2. (d) La suite (u_n) étant définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$

2. (d) La suite (u_n) étant définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0\,; +\infty[$.

2. (d) La suite (u_n) étant définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0\,;+\infty[$.
Et comme la suite (u_n) est convergente,

2. (d) La suite (u_n) étant définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0\,;+\infty[$. Et comme la suite (u_n) est convergente, sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$,

2. (d) La suite (u_n) étant définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0\,;+\infty[$. Et comme la suite (u_n) est convergente, sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$, soit $\sqrt{x} = x$.

2. (d) La suite (u_n) étant définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0\,;\,+\infty[$. Et comme la suite (u_n) est convergente, sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$, soit $\sqrt{x} = x$. La limite ne peut donc être que 0 ou 1

2. (d) La suite (u_n) étant définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0\,;+\infty[$. Et comme la suite (u_n) est convergente, sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$, soit $\sqrt{x} = x$. La limite ne peut donc être que 0 ou 1 et comme la suite est minorée par 1,

2. (d) La suite (u_n) étant définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0\,;+\infty[$. Et comme la suite (u_n) est convergente, sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$, soit $\sqrt{x} = x$. La limite ne peut donc être que 0 ou 1 et comme la suite est minorée par 1, la limite ne peut pas être 0 d'où :

2. (d) La suite (u_n) étant définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0\,;+\infty[$. Et comme la suite (u_n) est convergente, sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$, soit $\sqrt{x} = x$. La limite ne peut donc être que 0 ou 1 et comme la suite est minorée par 1, la limite ne peut pas être 0 d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

Partie B

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} =$$

Partie B

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \ln\left(u_{n+1}\right)$$

Partie B

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{u_n}\right) \end{aligned}$$

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n) \end{aligned}$$

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

On en déduit que :

Partie B

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}}$$

1. (b) De plus, on a $v_0 =$

1. (b) De plus, on a $v_0 = \ln(u_0)$

1. (b) De plus, on a $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$.

1. (b) De plus, on a $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$. La suite (v_n) étant géométrique de premier terme $v_0 = \ln(2)$ et de raison $\dfrac{1}{2}$,

1. (b) De plus, on a $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$. La suite (v_n) étant géométrique de premier terme $v_0 = \ln(2)$ et de raison $\dfrac{1}{2}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. (b) De plus, on a $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$. La suite (v_n) étant géométrique de premier terme $v_0 = \ln(2)$ et de raison $\frac{1}{2}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{v_n = \ln(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

1. (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \ln(u_n)$

1. (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \ln(u_n)$ donc, d'après la question précédente :

1. (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \ln(u_n)$ donc, d'après la question précédente :

$$\ln(u_n) = \ln(2) \times \frac{1}{2^n}$$

1. (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \ln(u_n)$ donc, d'après la question précédente :

$$\ln(u_n) = \ln(2) \times \frac{1}{2^n}$$

Et donc :

$$\boxed{\ln(2) = 2^n \ln(u_n)}$$

2. (a) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

2. (a) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

   - $u_6 \approx 1,011 > 1,01$

2. (a) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

- $u_6 \approx 1,011 > 1,01$
- $u_7 \approx 1,00543 < 1,01$

2. (a) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

- $u_6 \approx 1,011 > 1,01$
- $u_7 \approx 1,00543 < 1,01$

Le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0,99\,;\,1,01[$ est donc :

2. (a) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

- $u_6 \approx 1,011 > 1,01$
- $u_7 \approx 1,00543 < 1,01$

Le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0,99\,;\,1,01[$ est donc :

$$\boxed{k = 7}$$

2. (a) À l'aide de la calculatrice, on obtient :

- $u_6 \approx 1,011 > 1,01$
- $u_7 \approx 1,00543 < 1,01$

Le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0,99\,; 1,01[$ est donc :

$$\boxed{k = 7} \quad \text{et on a alors} \quad \boxed{u_7 \approx 1,00543}$$

2. (b) Comme $u_7 \in \left]0,99\,;\,1,01\right[$ et que l'on a décidé d'approcher $\ln(x)$ par $x-1$,

2. (b) Comme $u_7 \in]0,99\,;\,1,01[$ et que l'on a décidé d'approcher $\ln(x)$ par $x-1$, on peut prendre pour approximation de $\ln(u_7)$ le nombre $u_7 - 1$,

2. (b) Comme $u_7 \in]0,99\,;\,1,01[$ et que l'on a décidé d'approcher $\ln(x)$ par $x-1$, on peut prendre pour approximation de $\ln(u_7)$ le nombre $u_7 - 1$, soit :

$$\boxed{\ln(u_7) \approx 0,00543}$$

2. (c) D'après la question 1.c), on a :

2. (c) D'après la question 1.c), on a :

$$\ln(2) = 2^7 \times \ln(u_7)$$

2. (c) D'après la question 1.c), on a :

$$\ln(2) = 2^7 \times \ln(u_7)$$

Et donc, en utilisant l'approximation précédente, on obtient $\ln(2) \approx$

2. (c) D'après la question 1.c), on a :

$$\ln(2) = 2^7 \times \ln(u_7)$$

Et donc, en utilisant l'approximation précédente, on obtient $\ln(2) \approx 2^7 \times 0,00543$

2. (c) D'après la question 1.c), on a :

$$\ln(2) = 2^7 \times \ln(u_7)$$

Et donc, en utilisant l'approximation précédente, on obtient $\ln(2) \approx 2^7 \times 0,00543 = 128 \times 0,00543$

2. (c) D'après la question 1.c), on a :

$$\ln(2) = 2^7 \times \ln(u_7)$$

Et donc, en utilisant l'approximation précédente, on obtient $\ln(2) \approx 2^7 \times 0,00543 = 128 \times 0,00543$ soit :

$$\boxed{\ln(2) \approx 0,69504}$$

3. On complète l'algorithme de la façon suivante :

3. On complète l'algorithme de la façon suivante :

```
from math import*
def Briggs(a) :
    n = 0
    while a >= 1.01 :
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L = 2**n*a
    return L
```

- **Affirmation 1 : Vrai**

- **Affirmation 1 : Vrai**
  On a, en utilisant la relation de Chasles et les égalités vectorielles dans le cube :

- **Affirmation 1 : Vrai**
  On a, en utilisant la relation de Chasles et les égalités vectorielles dans le cube :

$$\overrightarrow{JH} =$$

- **Affirmation 1 : Vrai**
  On a, en utilisant la relation de Chasles et les égalités vectorielles dans le cube :

$$\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KH}$$

Exercice 3 - Partie A

- **Affirmation 1 : Vrai**
  On a, en utilisant la relation de Chasles et les égalités vectorielles dans le cube :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JH} &= \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KH} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MH}\end{aligned}$$

- **Affirmation 1 : Vrai**
  On a, en utilisant la relation de Chasles et les égalités vectorielles dans le cube :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JH} &= \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KH}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MH}\\ &= 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DM}\end{aligned}$$

- **Affirmation 1 : Vrai**
  On a, en utilisant la relation de Chasles et les égalités vectorielles dans le cube :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JH} &= \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KH} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MH} \\ &= 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DM} \\ &= 2\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DM}\end{aligned}$$

- **Affirmation 1 : Vrai**
  On a, en utilisant la relation de Chasles et les égalités vectorielles dans le cube :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JH} &= \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KH} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MH} \\ &= 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DM} \\ &= 2\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DM}\end{aligned}$$

  On a donc bien $\overrightarrow{JH} = 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB}$.

- **Affirmation 2 : Faux**

- **Affirmation 2 : Faux**
  On peut remarquer que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$

- **Affirmation 2 : Faux**

  On peut remarquer que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$ et donc que :

  $$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$$

- **Affirmation 2 : Faux**
  On peut remarquer que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$ et donc que :

  $$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$$

  Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AG}$ sonc donc coplanaires,

- **Affirmation 2 : Faux**
  On peut remarquer que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$ et donc que :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$$

  Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AG}$ sonc donc coplanaires, on en déduit que le triplet $(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AH}\,,\,\overrightarrow{AG})$ n'est pas une base de l'espace.

- **Affirmation 3 : Vrai**

- **Affirmation 3 : Vrai**
  On a :
  $$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{LM} =$$

- **Affirmation 3 : Vrai**
  On a :
  $$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IK}$$

- **Affirmation 3 : Vrai**

  On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IK}\\ &= \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IA} \quad \textit{(par projection orthogonale)}\end{aligned}$$

- **Affirmation 3 : Vrai**

  On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IK}\\ &= \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IA} \quad \textit{(par projection orthogonale)}\\ &= -IB \times IA\end{aligned}$$

- **Affirmation 3 : Vrai**

  On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IK} \\
&= \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IA} \quad \textit{(par projection orthogonale)} \\
&= -IB \times IA \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- **Affirmation 3 : Vrai**

  On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IK} \\
&= \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IA} \quad \textit{(par projection orthogonale)} \\
&= -IB \times IA \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Partie B

- **Affirmation 4 : Faux**

Partie B

- **Affirmation 4 : Faux**

  Le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Partie B

- **Affirmation 4 : Faux**

  Le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$.

- **Affirmation 4 : Faux**

  Le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$. On a alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} =$$

- **Affirmation 4 : Faux**

  Le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$. On a alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = 3\times 2 + (-3)\times(-1) + 8\times 3$$

- **Affirmation 4 : Faux**

  Le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$. On a alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = 3\times 2 + (-3)\times(-1) + 8\times 3 = 33$$

- **Affirmation 4 : Faux**

  Le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$. On a alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = 3 \times 2 + (-3) \times (-1) + 8 \times 3 = 33 \neq 0$$

- **Affirmation 4 : Faux**

  Le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = 3 \times 2 + (-3) \times (-1) + 8 \times 3 = 33 \neq 0$$

  Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont donc pas orthogonaux.

- **Affirmation 4 : Faux**

  Le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$. On a alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = 3\times 2 + (-3)\times(-1) + 8\times 3 = 33 \neq 0$$

  Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont donc pas orthogonaux. On en déduit que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) ne sont pas parallèles.

- **Affirmation 5 : Vrai**

- **Affirmation 5 : Vrai**
  Le plan d'équation $-2x + y - 3z + 34 = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

- **Affirmation 5 : Vrai**
  Le plan d'équation $-2x + y - 3z + 34 = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Ce vecteur étant colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$,

- **Affirmation 5 : Vrai**
  Le plan d'équation $-2x+y-3z+34=0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Ce vecteur étant colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$, le plan $\mathscr{P}$ et le plan d'équation $-2x+y-3z+34=0$ sont parallèles.

- **Affirmation 5 : Vrai**
  Le plan d'équation $-2x + y - 3z + 34 = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Ce vecteur étant colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$, le plan $\mathscr{P}$ et le plan d'équation $-2x + y - 3z + 34 = 0$ sont parallèles. De plus $-2 \times 5 + (-3) - 3 \times 7 + 34 = -10 - 3 - 21 + 34 = 0$

- **Affirmation 5 : Vrai**
  Le plan d'équation $-2x+y-3z+34=0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Ce vecteur étant colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$, le plan $\mathscr{P}$ et le plan d'équation $-2x+y-3z+34=0$ sont parallèles. De plus $-2\times5+(-3)-3\times7+34=-10-3-21+34=0$ donc le point B appartient au plan d'équation $-2x+y-3z+34=0$.

- **Affirmation 5 : Vrai**
Le plan d'équation $-2x + y - 3z + 34 = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Ce vecteur étant colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$, le plan $\mathscr{P}$ et le plan d'équation $-2x + y - 3z + 34 = 0$ sont parallèles. De plus $-2 \times 5 + (-3) - 3 \times 7 + 34 = -10 - 3 - 21 + 34 = 0$ donc le point B appartient au plan d'équation $-2x + y - 3z + 34 = 0$. Finalement le plan d'équation $-2x + y - 3z + 34 = 0$ est bien le plan passant par B et parallèle à $\mathscr{P}$,

- **Affirmation 5 : Vrai**
  Le plan d'équation $-2x + y - 3z + 34 = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Ce vecteur étant colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$, le plan $\mathscr{P}$ et le plan d'équation $-2x + y - 3z + 34 = 0$ sont parallèles. De plus $-2 \times 5 + (-3) - 3 \times 7 + 34 = -10 - 3 - 21 + 34 = 0$ donc le point B appartient au plan d'équation $-2x + y - 3z + 34 = 0$. Finalement le plan d'équation $-2x + y - 3z + 34 = 0$ est bien le plan passant par B et parallèle à $\mathscr{P}$, il s'agit donc du plan $\mathscr{P}'$.

- **Affirmation 6 : Vrai**

- **Affirmation 6 : Vrai**
  Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$.

- **Affirmation 6 : Vrai**
  Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$.
  Soit Δ la droite passant par A orthogonalement à $\mathscr{P}$.

- **Affirmation 6 : Vrai**
  Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$.
  Soit Δ la droite passant par A orthogonalement à $\mathscr{P}$. Δ admet pour représentation paramétrique :

- **Affirmation 6 : Vrai**

  Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$.
  Soit Δ la droite passant par A orthogonalement à $\mathscr{P}$. Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

- **Affirmation 6 : Vrai**

  Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$.
  Soit Δ la droite passant par A orthogonalement à $\mathscr{P}$. Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

  On injecte les coordonnées de cette représentation paramétrique dans l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$:

- **Affirmation 6 : Vrai**

  Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$.
  Soit Δ la droite passant par A orthogonalement à $\mathscr{P}$. Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

  On injecte les coordonnées de cette représentation paramétrique dans l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$:

$$2(2 + 2t) - (-t) + 3(-1 + 3t) + 6 = 0 \iff$$

- **Affirmation 6 : Vrai**

  Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$.
  Soit Δ la droite passant par A orthogonalement à $\mathscr{P}$. Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

  On injecte les coordonnées de cette représentation paramétrique dans l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$:

$$2(2+2t) - (-t) + 3(-1+3t) + 6 = 0 \Longleftrightarrow 4 + 4t + t - 3 + 9t + 6 = 0$$

- **Affirmation 6 : Vrai**

  Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$.
  Soit Δ la droite passant par A orthogonalement à $\mathscr{P}$. Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

  On injecte les coordonnées de cette représentation paramétrique dans l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned} 2(2+2t) - (-t) + 3(-1+3t) + 6 = 0 &\iff 4 + 4t + t - 3 + 9t + 6 = 0 \\ &\iff 14t = -7 \end{aligned}$$

- **Affirmation 6 : Vrai**

  Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$.
  Soit Δ la droite passant par A orthogonalement à $\mathscr{P}$. Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

  On injecte les coordonnées de cette représentation paramétrique dans l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned} 2(2+2t) - (-t) + 3(-1+3t) + 6 = 0 &\iff 4 + 4t + t - 3 + 9t + 6 = 0 \\ &\iff 14t = -7 \\ &\iff t = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- **Affirmation 6 : Vrai**

  Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$.
  Soit Δ la droite passant par A orthogonalement à $\mathscr{P}$. Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

  On injecte les coordonnées de cette représentation paramétrique dans l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned} 2(2+2t) - (-t) + 3(-1+3t) + 6 = 0 &\iff 4 + 4t + t - 3 + 9t + 6 = 0 \\ &\iff 14t = -7 \\ &\iff t = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

  On en déduit $H\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-\frac{5}{2}\right)$

- **Affirmation 6 : Vrai**
  Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$.
  Soit Δ la droite passant par A orthogonalement à $\mathscr{P}$. Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

On injecte les coordonnées de cette représentation paramétrique dans l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned} 2(2+2t) - (-t) + 3(-1+3t) + 6 = 0 &\iff 4 + 4t + t - 3 + 9t + 6 = 0 \\ &\iff 14t = -7 \\ &\iff t = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit $H\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-\frac{5}{2}\right)$ et on a alors :

$$AH =$$

$$AH = \sqrt{(2-1)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{5}{2}\right)^2}$$

$$
\begin{aligned}
AH &= \sqrt{(2-1)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{5}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{(2-1)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{(2-1)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{14}{4}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
AH &= \sqrt{(2-1)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{5}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{14}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{14}}{2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
AH &= \sqrt{(2-1)^2 + \left(0-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1+\frac{5}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{14}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{14}}{2}
\end{aligned}$$

La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est donc égale à $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

- **Affirmation 7 : Faux**

- **Affirmation 7 : Faux**

  La droite (AB) admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3t \\ z = -1 + 8t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

- **Affirmation 7 : Faux**

  La droite (AB) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3t \\ z = -1 + 8t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Déterminons alors l'intersection des droites (AB) et (d).

- **Affirmation 7 : Faux**

  La droite (AB) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -3t \\ z = -1+8t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Déterminons alors l'intersection des droites (AB) et (d).

$$\begin{cases} 2+3t = -12+2k \\ -3t = 6 \\ -1+8t = 3-5k \end{cases} \iff$$

- **Affirmation 7 : Faux**

La droite (AB) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3t \\ z = -1 + 8t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Déterminons alors l'intersection des droites (AB) et (d).

$$\begin{cases} 2 + 3t = -12 + 2k \\ -3t = 6 \\ -1 + 8t = 3 - 5k \end{cases} \iff \begin{cases} 3t - 2k = -14 \\ t = -2 \\ 8t + 5k = 4 \end{cases}$$

- **Affirmation 7 : Faux**

  La droite (AB) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3t \\ z = -1 + 8t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Déterminons alors l'intersection des droites (AB) et (d).

$$\begin{cases} 2 + 3t = -12 + 2k \\ -3t = 6 \\ -1 + 8t = 3 - 5k \end{cases} \iff \begin{cases} 3t - 2k = -14 \\ t = -2 \\ 8t + 5k = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -6 - 2k = -14 \\ t = -2 \\ -16 + 5k = 4 \end{cases}$$

- **Affirmation 7 : Faux**
  La droite (AB) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -3t \\ z = -1+8t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Déterminons alors l'intersection des droites (AB) et (d).

$$\begin{cases} 2+3t = -12+2k \\ -3t = 6 \\ -1+8t = 3-5k \end{cases} \iff \begin{cases} 3t-2k = -14 \\ t = -2 \\ 8t+5k = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -6-2k = -14 \\ t = -2 \\ -16+5k = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k = 4 \\ t = -2 \\ k = 4 \end{cases}$$

Les droites (AB) et (d) sont donc sécantes au point de paramètre $t = -2$ dans la représentation paramétrique de (AB)

Les droites (AB) et (d) sont donc sécantes au point de paramètre $t = -2$ dans la représentation paramétrique de (AB) et de paramètre $k = 4$ dans celle de (d), Les droites (AB) et (d) sont donc sécantes au point de paramètre $t = -2$ dans la représentation paramétrique de (AB) et de paramètre $k = 4$ dans celle de (d), c'est-à-dire au point de coordonnées $(-4\,;6\,;-17)$.

Les droites (AB) et (d) sont donc sécantes au point de paramètre $t = -2$ dans la représentation paramétrique de (AB) et de paramètre $k = 4$ dans celle de (d), c'est-à-dire au point de coordonnées $(-4\,;6\,;-17)$. Les droites (AB) et (d) sont sécantes donc coplanaires.

Exercice 4 - Partie A

1. (a) La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

Exercice 4 - Partie A

1. (a) La fonction f est dérivable sur $[0\,;\pi]$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, on a :

$$f'(x) =$$

1. (a) La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \times \sin(x) + \mathrm{e}^x \times \cos(x)$$

1. (a) La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^x \times \sin(x) + \mathrm{e}^x \times \cos(x) \\ &= \mathrm{e}^x \left(\sin(x) + \cos(x)\right) \end{aligned}$$

1. (a) La fonction f est dérivable sur $[0\,;\pi]$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^x \times \sin(x) + \mathrm{e}^x \times \cos(x) \\ &= \mathrm{e}^x\left(\sin(x) + \cos(x)\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \mathrm{e}^x\left(\sin(x) + \cos(x)\right)}$$

1. (b) Pour tout $x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$,

1. (b) Pour tout $x \in \left]0\,; \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\mathrm{e}^{x} > 0$,

1. (b) Pour tout $x \in \left]0\,;\, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\mathrm{e}^x > 0$, $\sin(x) > 0$

1. (b) Pour tout $x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\mathrm{e}^x > 0$, $\sin(x) > 0$ et $\cos(x) > 0$.

1. (b) Pour tout $x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $e^x > 0$, $\sin(x) > 0$ et $\cos(x) > 0$. On en déduit que $f'(x) > 0$

1. (b) Pour tout $x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\mathrm{e}^{x} > 0$, $\sin(x) > 0$ et $\cos(x) > 0$. On en déduit que $f'(x) > 0$ et donc que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]}$$

2. (a) On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

2. (a) On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = 1(x - 0) + 0$,

2. (a) On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = 1(x - 0) + 0$, soit :

$$\boxed{y = x}$$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ et, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $[0\,;\pi]$ et, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, on a :

$$f''(x) =$$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ et, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$f''(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\sin(x) + \cos(x)\right) + \mathrm{e}^{x}\left(\cos(x) - \sin(x)\right)$$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ et, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^{x}\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+\mathrm{e}^{x}\left(\cos(x)-\sin(x)\right)\\ &= \mathrm{e}^{x}\left(2\cos(x)\right) \end{aligned}$$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ et, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+\mathrm{e}^x\left(\cos(x)-\sin(x)\right) \\ &= \mathrm{e}^x\left(2\cos(x)\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^x\cos(x)$$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ et, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^{x}\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+\mathrm{e}^{x}\left(\cos(x)-\sin(x)\right) \\ &= \mathrm{e}^{x}\left(2\cos(x)\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{x}\cos(x)$$

Or, pour tout $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$,

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ et, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+\mathrm{e}^x\left(\cos(x)-\sin(x)\right) \\ &= \mathrm{e}^x\left(2\cos(x)\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^x\cos(x)$$

Or, pour tout $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^x \geqslant 0$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $[0\,;\pi]$ et, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^{x}\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+\mathrm{e}^{x}\left(\cos(x)-\sin(x)\right) \\ &= \mathrm{e}^{x}\left(2\cos(x)\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{x}\cos(x)$$

Or, pour tout $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^{x} \geqslant 0$ et $\cos(x) \geqslant 0$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ et, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+\mathrm{e}^x\left(\cos(x)-\sin(x)\right) \\ &= \mathrm{e}^x\left(2\cos(x)\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^x\cos(x)$$

Or, pour tout $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^x \geqslant 0$ et $\cos(x) \geqslant 0$ donc $f''(x) \geqslant 0$.

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $[0\,;\pi]$ et, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^{x}\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+\mathrm{e}^{x}\left(\cos(x)-\sin(x)\right) \\ &= \mathrm{e}^{x}\left(2\cos(x)\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{x}\cos(x)$$

Or, pour tout $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^{x} \geqslant 0$ et $\cos(x) \geqslant 0$ donc $f''(x) \geqslant 0$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe sur } \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]}$$

2. (c) La fonction f étant convexe sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$,

2. (c) La fonction f étant convexe sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes.

2. (c) La fonction f étant convexe sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes. En particulier $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T

2. (c) La fonction f étant convexe sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes. En particulier $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T et donc, pour tout $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \geqslant x$

2. (c) La fonction f étant convexe sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes. En particulier $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T et donc, pour tout $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \geqslant x$ soit :

$$\boxed{\mathrm{e}^x \sin(x) \geqslant x}$$

3. En $\frac{\pi}{2}$, $\cos(x)$ s'annule en changeant de signe

3. En $\dfrac{\pi}{2}$, $\cos(x)$ s'annule en changeant de signe donc $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.

3. En $\dfrac{\pi}{2}$, $\cos(x)$ s'annule en changeant de signe donc $f''(x)$ s'annule en changeant de signe. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point d'abscisse } \dfrac{\pi}{2} \text{ de } \mathscr{C}_f \text{ est un point d'inflexion}}$$

3. En $\dfrac{\pi}{2}$, $\cos(x)$ s'annule en changeant de signe donc $f''(x)$ s'annule en changeant de signe. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point d'abscisse } \dfrac{\pi}{2} \text{ de } \mathscr{C}_f \text{ est un point d'inflexion}}$$

Plus précisément :

3. En $\dfrac{\pi}{2}$, $\cos(x)$ s'annule en changeant de signe donc $f''(x)$ s'annule en changeant de signe. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point d'abscisse } \dfrac{\pi}{2} \text{ de } \mathscr{C}_f \text{ est un point d'inflexion}}$$

Plus précisément :

- f est convexe sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. En $\dfrac{\pi}{2}$, $\cos(x)$ s'annule en changeant de signe donc $f''(x)$ s'annule en changeant de signe. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point d'abscisse } \dfrac{\pi}{2} \text{ de } \mathscr{C}_f \text{ est un point d'inflexion}}$$

Plus précisément :

- f est convexe sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- f est concave sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.

Partie B

1. Effectuons deux intégrations par parties différentes.

1. Effectuons deux intégrations par parties différentes.
   - **Première intégration par parties**

1. Effectuons deux intégrations par parties différentes.
   - **Première intégration par parties**
     On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases}$$

Partie B

1. Effectuons deux intégrations par parties différentes.
   - **Première intégration par parties**
     On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

Partie B

1. Effectuons deux intégrations par parties différentes.
   - **Première intégration par parties**

     On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

     On a alors, par intégration par parties :

Partie B

1. Effectuons deux intégrations par parties différentes.
   - **Première intégration par parties**
     On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{x} \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{x} \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$I =$$

Partie B

1. Effectuons deux intégrations par parties différentes.
   - **Première intégration par parties**

     On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$I = \Big[-\mathrm{e}^x \cos(x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Partie B

1. Effectuons deux intégrations par parties différentes.
   - **Première intégration par parties**

     On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \Big[-\mathrm{e}^x\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{e}^0\cos(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Partie B

1. Effectuons deux intégrations par parties différentes.
   - **Première intégration par parties**
     On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

     On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \Big[-\mathrm{e}^x \cos(x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{e}^0 \cos(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + J \end{aligned}$$

- **Deuxième intégration par parties**

- **Deuxième intégration par parties**

  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^{x} \end{cases}$$

- **Deuxième intégration par parties**

  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

- **Deuxième intégration par parties**

  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^{x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = \mathrm{e}^{x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

- **Deuxième intégration par parties**

  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$I =$$

- **Deuxième intégration par parties**

  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$I = \Big[\mathrm{e}^x \sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Deuxième intégration par parties**

  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \left[\mathrm{e}^x \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{e}^0 \sin(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- **Deuxième intégration par parties**

  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \left[\mathrm{e}^x \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{e}^0 \sin(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J \end{aligned}$$

- **Deuxième intégration par parties**

  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \Big[\mathrm{e}^x \sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{e}^0 \sin(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J \end{aligned}$$

On a montré les deux égalités :

- **Deuxième intégration par parties**

  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \Big[\mathrm{e}^x \sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{e}^0 \sin(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J \end{aligned}$$

On a montré les deux égalités :

$$\boxed{I = 1 + J} \quad \text{et} \quad \boxed{I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J}$$

2. En faisant la somme des deux égalités précédentes, on obtient :

2. En faisant la somme des deux égalités précédentes, on obtient :

$$2I = 1 + J + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J = 1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$$

2. En faisant la somme des deux égalités précédentes, on obtient :

$$2I = 1 + J + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J = 1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$$

Et donc :

$$\boxed{I = \frac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}}$$

3. Pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$

3. Pour tout $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$ donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré est :

3. Pour tout $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$ donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré est :

$$\mathscr{A} =$$

3. Pour tout $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$ donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré est :

$$\mathscr{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Pour tout $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$ donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré est :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{(linéarité de l'intégrale)}\end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$ donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré est :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= I - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$ donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré est :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= I - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

3. Pour tout $x \in \left[0\,;\, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$ donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré est :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= I - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

3. Pour tout $x \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$ donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré est :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= I - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

3. Pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$ donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré est :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= I - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

On en déduit que $\mathscr{A} = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \dfrac{\pi^2}{8}$

3. Pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$ donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré est :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= I - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

On en déduit que $\mathscr{A} = \dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \dfrac{\pi^2}{8}$ soit :

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{4+4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+\pi^2}{8}}$$

Tous les sujets corrigés avec sources $\LaTeX$:

http://specialite.mathematiques.free.fr/

Pour toute remarque :

fabien.vinsu@ac-besancon.fr