Corrigé de l'épreuve du baccalauréat de spécialité mathématiques

Centres étrangers
12 juin 2025

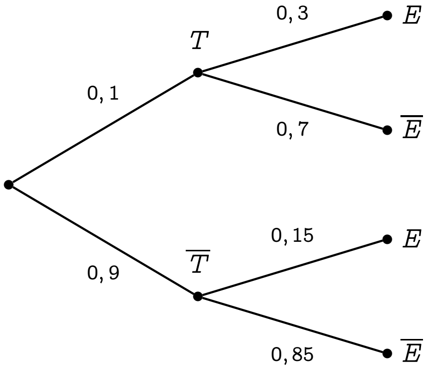
http://specialite.mathematiques.free.fr/
fabien.vinsu@ac-besancon.fr

Exercice 1 - Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :

Exercice 1 - Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



On a alors :

$$P(\overline{T} \cap E) =$$

On a alors :

$$P(\overline{T} \cap E) = P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(E)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(\overline{T} \cap E) &= P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(E) \\ &= 0,9 \times 0,15 \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(\overline{T} \cap E) &= P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(E) \\ &= 0,9 \times 0,15 \\ &= 0,135 \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(\overline{T} \cap E) &= P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(E) \\ &= 0,9 \times 0,15 \\ &= 0,135 \end{aligned}$$

La probabilité que le contrôle soit partiel et qu'une erreur soit détectée est donc :

$$\boxed{P(\overline{T} \cap E) = 0,135}$$

2. Il s'agit de calculer $P(E)$.

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) =$$

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(T) \times P_T(E) + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(E)$$

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(T) \times P_T(E) + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(E) \\ &= 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,15 \end{aligned}$$

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(T) \times P_T(E) + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(E) \\ &= 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,15 \\ &= 0,03 + 0,135 \end{aligned}$$

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(T) \times P_T(E) + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(E) \\ &= 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,15 \\ &= 0,03 + 0,135 \\ &= 0,165 \end{aligned}$$

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(T) \times P_T(E) + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(E) \\ &= 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,15 \\ &= 0,03 + 0,135 \\ &= 0,165 \end{aligned}$$

La probabilité qu'une erreur soit détectée lors du contrôle est donc :

$$\boxed{P(E) = 0,165}$$

3. Il s'agit de calculer $P_E(T)$:

3. Il s'agit de calculer $P_E(T)$:

$$P_E(T) = \frac{P(T \cap E)}{P(E)}$$

3. Il s'agit de calculer $P_E(T)$:

$$\begin{aligned} P_E(T) &= \frac{P(T \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{0,1 \times 0,3}{0,165} \end{aligned}$$

3. Il s'agit de calculer $P_E(T)$:

$$\begin{aligned} P_E(T) &= \frac{P(T \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{0,1 \times 0,3}{0,165} \\ &\approx 0,18 \end{aligned}$$

3. Il s'agit de calculer $P_E(T)$:

$$\begin{aligned} P_E(T) &= \frac{P(T \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{0,1 \times 0,3}{0,165} \\ &\approx 0,18 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée est donc :

$$\boxed{P_E(T) \approx 0,18}$$

1. On répète 15 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli donc la probabilité de succès est $0,165$.

Partie B

1. On répète 15 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli donc la probabilité de succès est $0,165$. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès donc :

Partie B

1. On répète 15 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli donc la probabilité de succès est $0,165$. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 15 \text{ et } p = 0,165}$$

2. Il s'agit de calculer $P(X = 5)$:

2. Il s'agit de calculer $P(X=5)$:

$$P(X=5) =$$

2. Il s'agit de calculer $P(X=5)$:

$$P(X=5) = \binom{15}{5} \times 0,165^5 \times 0,835^{10}$$

2. Il s'agit de calculer $P(X = 5)$:

$$P(X=5) = \binom{15}{5} \times 0,165^5 \times 0,835^{10} \approx 0,06$$

2. Il s'agit de calculer $P(X = 5)$:

$$P(X = 5) = \binom{15}{5} \times 0,165^5 \times 0,835^{10} \approx 0,06$$

La probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées est donc :

$$\boxed{P(X = 5) \approx 0,06}$$

3. Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 1)$:

3. Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 1)$:

$$P(X \geqslant 1) =$$

3. Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 1)$:

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,835^{15}$$

3. Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 1)$:

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,835^{15} \approx 0,93$$

3. Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 1)$:

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,835^{15} \approx 0,93$$

La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est donc :

$$\boxed{P(X \geqslant 1) \approx 0,93}$$

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur.

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$.

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$. La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est alors :

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$. La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est alors :

$$P(Y \geqslant 1) =$$

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$. La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0)$$

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$. La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$$

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$. La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$$

Il s'agit alors de résoudre l'inéquation $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$:

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$. La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$$

Il s'agit alors de résoudre l'inéquation $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$:

$P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 \Longleftrightarrow$

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$. La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$$

Il s'agit alors de résoudre l'inéquation $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$:

$$P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 \Longleftrightarrow 1 - 0,835^n \geqslant 0,99$$

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$. La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$$

Il s'agit alors de résoudre l'inéquation $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$:

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,835^n \geqslant 0,99 \\ &\iff 0,835^n \leqslant 0,01 \end{aligned}$$

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$. La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$$

Il s'agit alors de résoudre l'inéquation $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$:

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,835^n \geqslant 0,99 \\ &\iff 0,835^n \leqslant 0,01 \\ &\iff \ln\left(0,835^n\right) \leqslant \ln(0,01) \end{aligned}$$

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$. La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$$

Il s'agit alors de résoudre l'inéquation $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$:

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,835^n \geqslant 0,99 \\ &\iff 0,835^n \leqslant 0,01 \\ &\iff \ln\left(0,835^n\right) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n\ln(0,835) \leqslant \ln(0,01) \end{aligned}$$

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$. La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$$

Il s'agit alors de résoudre l'inéquation $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$:

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,835^n \geqslant 0,99 \\ &\iff 0,835^n \leqslant 0,01 \\ &\iff \ln\left(0,835^n\right) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n\ln(0,835) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \quad \textit{(car } \ln(0,835) < 0\textit{)} \end{aligned}$$

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$. La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$$

Il s'agit alors de résoudre l'inéquation $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$:

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,835^n \geqslant 0,99 \\ &\iff 0,835^n \leqslant 0,01 \\ &\iff \ln\left(0,835^n\right) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n\ln(0,835) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \quad \textit{(car } \ln(0,835) < 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \approx 25,5$

4. Soit n le nombre de contrôles et Y la variable aléatoire égale au nombre de contrôles mettant en évidence une erreur. Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$. La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$$

Il s'agit alors de résoudre l'inéquation $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$:

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,835^n \geqslant 0,99 \\ &\iff 0,835^n \leqslant 0,01 \\ &\iff \ln\left(0,835^n\right) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n\ln(0,835) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \quad \textit{(car } \ln(0,835) < 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \approx 25,5$ donc le nombre minimum de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que la contrainte soit respectée est :

$$\boxed{n = 26}$$

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,165$,

Partie C

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,165$, son espérance est donc $E(X_1) = n \times p$

Partie C

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,165$, son espérance est donc $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165$

Partie C

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,165$, son espérance est donc $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = 3,3$

Partie C

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,165$, son espérance est donc $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = 3,3$ et sa variance est $V(X_1) =$

Partie C

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,165$, son espérance est donc $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = 3,3$ et sa variance est $V(X_1) = np(1-p)$

Partie C

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,165$, son espérance est donc $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = 3,3$ et sa variance est $V(X_1) = np(1-p) = 20 \times 0,165 \times 0,835$

Partie C

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,165$, son espérance est donc $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = 3,3$ et sa variance est $V(X_1) = np(1-p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = 2,7555$

Partie C

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,165$, son espérance est donc $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = 3,3$ et sa variance est $V(X_1) = np(1-p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = 2,7555$, soit :

$$\boxed{E(X_1) = 3,3} \quad \text{et} \quad \boxed{V(X_1) = 2,7555}$$

2. Les variables aléatoires X_2 et X_3 ont la même espérance et la même variance que X_1 et par linéarité de l'espérance, on a :

2. Les variables aléatoires X_2 et X_3 ont la même espérance et la même variance que X_1 et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$$

2. Les variables aléatoires X_2 et X_3 ont la même espérance et la même variance que X_1 et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3,3 + 3,3 + 3,3$$

2. Les variables aléatoires X_2 et X_3 ont la même espérance et la même variance que X_1 et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3,3 + 3,3 + 3,3 = 9,9$$

2. Les variables aléatoires X_2 et X_3 ont la même espérance et la même variance que X_1 et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3,3 + 3,3 + 3,3 = 9,9$$

Et comme les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, on a :

2. Les variables aléatoires X_2 et X_3 ont la même espérance et la même variance que X_1 et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3,3 + 3,3 + 3,3 = 9,9$$

Et comme les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, on a :

$$V(S) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)$$

2. Les variables aléatoires X_2 et X_3 ont la même espérance et la même variance que X_1 et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3,3 + 3,3 + 3,3 = 9,9$$

Et comme les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, on a :

$$V(S) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 2,7555 + 2,7555 + 2,7555$$

2. Les variables aléatoires X_2 et X_3 ont la même espérance et la même variance que X_1 et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3,3 + 3,3 + 3,3 = 9,9$$

Et comme les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, on a :

$$V(S) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 2,7555 + 2,7555 + 2,7555 = 8,2665$$

2. Les variables aléatoires X_2 et X_3 ont la même espérance et la même variance que X_1 et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3,3 + 3,3 + 3,3 = 9,9$$

Et comme les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, on a :

$$V(S) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 2,7555 + 2,7555 + 2,7555 = 8,2665$$

On a donc bien :

$$\boxed{E(S) = 9,9} \quad \text{et} \quad \boxed{V(S) = 8,2665}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire S, pour tout réel strictement positif δ, on a :

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire S, pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P\left(|S - E(S)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(S)}{\delta^2}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire S, pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P(|S - E(S)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(S)}{\delta^2}$$

En prenant $\delta = 4$, on obtient :

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire S, pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P\left(|S - E(S)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(S)}{\delta^2}$$

En prenant $\delta = 4$, on obtient :

$$P\left(|S - 10| \geqslant 4\right) \leqslant \frac{8,2665}{16}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire S, pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P\left(|S - E(S)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(S)}{\delta^2}$$

En prenant $\delta = 4$, on obtient :

$$P\left(|S - 10| \geqslant 4\right) \leqslant \frac{8,2665}{16}$$

Puis en passant à l'événement contraire :

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire S, pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P\left(|S - E(S)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(S)}{\delta^2}$$

En prenant $\delta = 4$, on obtient :

$$P\left(|S - 10| \geqslant 4\right) \leqslant \frac{8,2665}{16}$$

Puis en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|S - 10| < 4\right) \geqslant 1 - \frac{8,2665}{16}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire S, pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P\left(|S - E(S)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(S)}{\delta^2}$$

En prenant $\delta = 4$, on obtient :

$$P\left(|S - 10| \geqslant 4\right) \leqslant \frac{8,2665}{16}$$

Puis en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|S - 10| < 4\right) \geqslant 1 - \frac{8,2665}{16}$$

Soit :

$$P\left(6 < S < 14\right) \geqslant 1 - \frac{8,2665}{16}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire S, pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P\left(|S - E(S)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(S)}{\delta^2}$$

En prenant $\delta = 4$, on obtient :

$$P\left(|S - 10| \geqslant 4\right) \leqslant \frac{8,2665}{16}$$

Puis en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|S - 10| < 4\right) \geqslant 1 - \frac{8,2665}{16}$$

Soit :

$$P\left(6 < S < 14\right) \geqslant 1 - \frac{8,2665}{16}$$

Or $1 - \dfrac{8,2665}{16} \approx 0,4833$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire S, pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P\left(|S - E(S)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(S)}{\delta^2}$$

En prenant $\delta = 4$, on obtient :

$$P\left(|S - 10| \geqslant 4\right) \leqslant \frac{8,2665}{16}$$

Puis en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|S - 10| < 4\right) \geqslant 1 - \frac{8,2665}{16}$$

Soit :

$$P\left(6 < S < 14\right) \geqslant 1 - \frac{8,2665}{16}$$

Or $1 - \dfrac{8,2665}{16} \approx 0,4833$ donc la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à $0,48$, soit :

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire S, pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P\left(|S - E(S)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(S)}{\delta^2}$$

En prenant $\delta = 4$, on obtient :

$$P\left(|S - 10| \geqslant 4\right) \leqslant \frac{8,2665}{16}$$

Puis en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|S - 10| < 4\right) \geqslant 1 - \frac{8,2665}{16}$$

Soit :

$$P\left(6 < S < 14\right) \geqslant 1 - \frac{8,2665}{16}$$

Or $1 - \dfrac{8,2665}{16} \approx 0,4833$ donc la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à $0,48$, soit :

$$\boxed{P\left(6 < S < 14\right) \geqslant 0,48}$$

Alors ? Vous avez bien aimé Tchebychev ?

Exercice 2

1. **Réponse a)**

1. **Réponse a)**

   La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$

Exercice 2

1. **Réponse a)**

   La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et la droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. **Réponse a)**

   La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et la droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont ni colinéaires ni orthogonaux

Exercice 2

1. **Réponse a)**

   La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et la droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont ni colinéaires ni orthogonaux donc les droites ne sont ni parallèles ni orthogonales.

1. **Réponse a)**

   La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et la droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont ni colinéaires ni orthogonaux donc les droites ne sont ni parallèles ni orthogonales. De plus, on peut remarquer que le point A appartient à la droite (d)

Exercice 2

1. **Réponse a)**

   La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et la droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont ni colinéaires ni orthogonaux donc les droites ne sont ni parallèles ni orthogonales. De plus, on peut remarquer que le point A appartient à la droite (d) car c'est le point de paramètre $t = 1$.

1. **Réponse a)**

   La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et la droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont ni colinéaires ni orthogonaux donc les droites ne sont ni parallèles ni orthogonales. De plus, on peut remarquer que le point A appartient à la droite (d) car c'est le point de paramètre $t = 1$. On en déduit que les droites (AB) et (d) sont sécantes non perpendiculaires.

2. **Réponse d)**

2. **Réponse d)**
D'après son équation cartésienne, le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal,

2. **Réponse d)**
D'après son équation cartésienne, le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal, soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. **Réponse d)**
D'après son équation cartésienne, le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal, soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$. La droite (AB) est donc orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

3. **Réponse b)**

   Le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal

3. **Réponse b)**

Le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et le plan $\mathscr{P}'$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}'\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

3. **Réponse b)**

Le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et le plan $\mathscr{P}'$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}'\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Or :

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}' =$$

3. **Réponse b)**

Le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et le plan $\mathscr{P}'$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}'\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Or :

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}' = 4 \times 2 + 4 \times 1 + (-2) \times 6$$

3. **Réponse b)**

Le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et le plan $\mathscr{P}'$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}'\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Or :

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}' = 4\times 2 + 4\times 1 + (-2)\times 6 = 8 + 4 - 12$$

3. **Réponse b)**

Le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et le plan $\mathscr{P}'$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}'\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Or :

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}' = 4\times 2+4\times 1+(-2)\times 6 = 8+4-12 = 0$$

3. **Réponse b)**

Le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et le plan $\mathscr{P}'$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}'\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Or :

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}' = 4\times 2 + 4\times 1 + (-2)\times 6 = 8 + 4 - 12 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont donc orthogonaux,

3. **Réponse b)**

Le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et le plan $\mathscr{P}'$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}'\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Or :

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}' = 4 \times 2 + 4 \times 1 + (-2) \times 6 = 8 + 4 - 12 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont donc orthogonaux, on en déduit que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires.

4. **Réponse b)**

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc

$\|\overrightarrow{AB}\| =$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4}$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36}$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| =$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25}$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$.

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. On a alors :

- D'une part :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. On a alors :

- D'une part :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12 + 10$$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. On a alors :

- D'une part :
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12 + 10 = 22$$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. On a alors :

- D'une part :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12 + 10 = 22$$

- D'autre part :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. On a alors :

- D'une part :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12 + 10 = 22$$

- D'autre part :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. On a alors :

- D'une part :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12 + 10 = 22$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 6\sqrt{34}\cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. On a alors :

- D'une part :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12 + 10 = 22$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})\\ &= 6\sqrt{34}\cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité $6\sqrt{34}\cos(\widehat{BAC}) = 22$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. On a alors :

- D'une part :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12 + 10 = 22$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 6\sqrt{34}\cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité $6\sqrt{34}\cos(\widehat{BAC}) = 22$

Puis $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{22}{6\sqrt{34}}$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. On a alors :

- D'une part :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12 + 10 = 22$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})\\ &= 6\sqrt{34}\cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité $6\sqrt{34}\cos(\widehat{BAC}) = 22$

Puis $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{22}{6\sqrt{34}} = \dfrac{11}{3\sqrt{34}}$

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. On a alors :

- D'une part :
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12 + 10 = 22$$

- D'autre part :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 6\sqrt{34}\cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité $6\sqrt{34}\cos(\widehat{BAC}) = 22$
Puis $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{22}{6\sqrt{34}} = \dfrac{11}{3\sqrt{34}}$
Et enfin, à l'aide de la calculatrice (en prenant bien garde d'être en mode degré), on obtient

4. **Réponse b)**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. On a alors :

- D'une part :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12 + 10 = 22$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})\\ &= 6\sqrt{34}\cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

  On en déduit l'égalité $6\sqrt{34}\cos(\widehat{BAC}) = 22$

  Puis $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{22}{6\sqrt{34}} = \dfrac{11}{3\sqrt{34}}$

  Et enfin, à l'aide de la calculatrice (en prenant bien garde d'être en mode degré), on obtient $\widehat{BAC} \approx 51°$.

Exercice 3 - Partie A

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty}$$

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1} (x+1) = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty \end{cases}$$

2. La fonction f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x) =$$

2. La fonction f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = 4 \times \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25}$$

2. La fonction f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25} \\ &= \frac{100}{25(x+1)} - \frac{2x(x+1)}{25(x+1)} \end{aligned}$$

2. La fonction f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25} \\ &= \frac{100}{25(x+1)} - \frac{2x(x+1)}{25(x+1)} \\ &= \frac{100-(2x^2+2x)}{25(x+1)} \end{aligned}$$

2. La fonction f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in \,]-1\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25} \\ &= \frac{100}{25(x+1)} - \frac{2x(x+1)}{25(x+1)} \\ &= \frac{100-(2x^2+2x)}{25(x+1)} \\ &= \frac{100-2x^2-2x)}{25(x+1)} \end{aligned}$$

2. La fonction f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in\,]-1\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4 \times \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25} \\
&= \frac{100}{25(x+1)} - \frac{2x(x+1)}{25(x+1)} \\
&= \frac{100-(2x^2+2x)}{25(x+1)} \\
&= \frac{100-2x^2-2x)}{25(x+1)}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{100-2x-2x^2}{25(x+1)}}$$

3. Pour tout $x \in \left]-1\,;+\infty\right[$, $x+1>0$

3. Pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, $x+1>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $100-2x-2x^2$.

3. Pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, $x+1>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $100-2x-2x^2$. Il s'agit d'un polynôme du second degré qui admet

deux racines :

3. Pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, $x+1>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $100-2x-2x^2$. Il s'agit d'un polynôme du second degré qui admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{201}}{2} \approx -7,6$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{201}}{2} \approx 6,6$.

3. Pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, $x+1>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $100-2x-2x^2$. Il s'agit d'un polynôme du second degré qui admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{201}}{2} \approx -7,6$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{201}}{2} \approx 6,6$.
On a donc le tableau :

x	-1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$-\infty$

3. Pour tout $x \in \left]-1\,; +\infty\right[$, $x+1>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $100-2x-2x^2$. Il s'agit d'un polynôme du second degré qui admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{201}}{2} \approx -7,6$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{201}}{2} \approx 6,6$.
On a donc le tableau :

x	-1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$-\infty$

Et comme $x_2 > 6,5$, on en déduit que :

3. Pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, $x+1>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $100-2x-2x^2$. Il s'agit d'un polynôme du second degré qui admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{201}}{2} \approx -7,6$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{201}}{2} \approx 6,6$.
On a donc le tableau :

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -1 & & x_2 & & +\infty \\
\hline
f'(x) & & + & 0 & - & \\
\hline
 & & & f(x_2) & & \\
f(x) & & \nearrow & & \searrow & \\
 & -\infty & & & & -\infty \\
\hline
\end{array}$$

Et comme $x_2 > 6,5$, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [2\,;6,5]}$$

4. On a $h(2) \approx 2,23$ et $h(6,5) \approx -0,13$.

4. On a $h(2) \approx 2,23$ et $h(6,5) \approx -0,13$.
    - Sur l'intervalle $[2\,;\,m]$,

4. On a $h(2) \approx 2,23$ et $h(6,5) \approx -0,13$.
   - Sur l'intervalle $[2\,;\,m]$, la fonction h est strictement positive (car $h(2) > 0$ et h est croissante) donc l'équation $h(x) = 0$ n'y admet aucune solution.

4. On a $h(2) \approx 2,23$ et $h(6,5) \approx -0,13$.
   - Sur l'intervalle $[2\,;\,m]$, la fonction h est strictement positive (car $h(2) > 0$ et h est croissante) donc l'équation $h(x) = 0$ n'y admet aucune solution.
   - Sur l'intervalle $[m\,;\,6,5]$, la fonction h est continue et strictement décroissante.

4. On a $h(2) \approx 2,23$ et $h(6,5) \approx -0,13$.
   - Sur l'intervalle $[2\,;\,m]$, la fonction h est strictement positive (car $h(2) > 0$ et h est croissante) donc l'équation $h(x) = 0$ n'y admet aucune solution.
   - Sur l'intervalle $[m\,;\,6,5]$, la fonction h est continue et strictement décroissante. De plus $h(m) \approx 2,364 > 0$ et $h(6,5) \approx -0,13 < 0$

4. On a $h(2) \approx 2,23$ et $h(6,5) \approx -0,13$.
   - Sur l'intervalle $[2\,;\,m]$, la fonction h est strictement positive (car $h(2) > 0$ et h est croissante) donc l'équation $h(x) = 0$ n'y admet aucune solution.
   - Sur l'intervalle $[m\,;\,6,5]$, la fonction h est continue et strictement décroissante. De plus $h(m) \approx 2,364 > 0$ et $h(6,5) \approx -0,13 < 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α.

4. On a $h(2) \approx 2,23$ et $h(6,5) \approx -0,13$.
   - Sur l'intervalle $[2\,;\,m]$, la fonction h est strictement positive (car $h(2) > 0$ et h est croissante) donc l'équation $h(x) = 0$ n'y admet aucune solution.
   - Sur l'intervalle $[m\,;\,6,5]$, la fonction h est continue et strictement décroissante. De plus $h(m) \approx 2,364 > 0$ et $h(6,5) \approx -0,13 < 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α.

   Finalement :

$$\boxed{\text{L'équation } h(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur l'intervalle } [2\,;\,6,5]}$$

5. (a) La commande bornes(2) renvoie :

5. (a) La commande bornes(2) renvoie :

$$\boxed{\texttt{(6.36,6.37)}}$$

5. (b) Cela signifie que :

5. (b) Cela signifie que :

$$\boxed{6,36 < \alpha \leqslant 6,37}$$

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel,
   $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
    - **Initialisation :**

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$,

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, on a donc bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$.

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
   - **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, on a donc bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel,
   $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, on a donc bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, on a donc bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$,

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel,
   $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, on a donc bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, on a donc bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$. On a alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$:

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
    - **Initialisation :**
      Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, on a donc bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
    - **Hérédité :**
      Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$. On a alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$:

$$f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(6,5)$$

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, on a donc bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$. On a alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur l'intervalle $[2\,;6,5]$:

     $$f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(6,5)$$

     Soit :

     $$f(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(6,5)$$

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, on a donc bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$. On a alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$:

     $$f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(6,5)$$

     Soit :

     $$f(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(6,5)$$

     De plus, on a $f(2) \geqslant 2$ et $f(6,5) \leqslant 6,5$, donc a fortiori :

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, on a donc bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$. On a alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$:

     $$f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(6,5)$$

     Soit :

     $$f(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(6,5)$$

     De plus, on a $f(2) \geqslant 2$ et $f(6,5) \leqslant 6,5$, donc a fortiori :

     $$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6,5$$

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, on a donc bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$. On a alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$:

     $$f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(6,5)$$

     Soit :

     $$f(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(6,5)$$

     De plus, on a $f(2) \geqslant 2$ et $f(6,5) \leqslant 6,5$, donc a fortiori :

     $$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6,5$$

     La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, on a donc bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$. On a alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$:

     $$f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(6,5)$$

     Soit :

     $$f(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(6,5)$$

     De plus, on a $f(2) \geqslant 2$ et $f(6,5) \leqslant 6,5$, donc a fortiori :

     $$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6,5$$

     La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
   - **Conclusion :**

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, on a donc bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$. On a alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$:
     $$f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(6,5)$$
     Soit :
     $$f(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(6,5)$$
     De plus, on a $f(2) \geqslant 2$ et $f(6,5) \leqslant 6,5$, donc a fortiori :
     $$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6,5$$
     La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion :**
     La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. D'après la question précédente :

2. D'après la question précédente :
   - La suite (u_n) est croissante (car $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

2. D'après la question précédente :
   - La suite (u_n) est croissante (car $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   - La suite (u_n) est majorée par $6,5$ (car $u_n \leqslant 6,5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

2. D'après la question précédente :
   - La suite (u_n) est croissante (car $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   - La suite (u_n) est majorée par $6,5$ (car $u_n \leqslant 6,5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

   On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell}$$

3. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

3. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue.

3. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue. On a alors, par passage à la limite dans cette relation de récurrence :

3. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue. On a alors, par passage à la limite dans cette relation de récurrence :

$$\ell = f(\ell)$$

3. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue. On a alors, par passage à la limite dans cette relation de récurrence :

$$\ell = f(\ell)$$

Autrement dit, la limite est un point fixe de f ou encore une solution de l'équation $f(x) - x = 0$.

3. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue. On a alors, par passage à la limite dans cette relation de récurrence :

$$\ell = f(\ell)$$

Autrement dit, la limite est un point fixe de f ou encore une solution de l'équation $f(x) - x = 0$. Or on a vu que α était l'unique solution de cette équation sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$ donc :

3. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue. On a alors, par passage à la limite dans cette relation de récurrence :

$$\ell = f(\ell)$$

Autrement dit, la limite est un point fixe de f ou encore une solution de l'équation $f(x) - x = 0$. Or on a vu que α était l'unique solution de cette équation sur l'intervalle $[2\,;6,5]$ donc :

$$\boxed{l = \alpha}$$

Exercice 4 - Partie A

1. Pour tout $t \in [0\,; +\infty[$, on a $h'(t) = 0$

1. Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, on a $h'(t) = 0$ d'où :

$$h'(t) + 0,48h(t) =$$

1. Pour tout $t \in [0\,; +\infty[$, on a $h'(t) = 0$ d'où :

$$h'(t) + 0,48h(t) = 0,48 \times \frac{1}{120}$$

Exercice 4 - Partie A

1. Pour tout $t \in [0\,; +\infty[$, on a $h'(t) = 0$ d'où :

$$h'(t) + 0,48h(t) = 0,48 \times \frac{1}{120} = 0,004$$

1. Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, on a $h'(t) = 0$ d'où :

$$h'(t) + 0,48h(t) = 0,48 \times \frac{1}{120} = 0,004 = \frac{1}{250}$$

Exercice 4 - Partie A

1. Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, on a $h'(t) = 0$ d'où :

$$h'(t) + 0,48h(t) = 0,48 \times \frac{1}{120} = 0,004 = \frac{1}{250}$$

   Donc :

$$\boxed{h \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_1)}$$

2. L'équation $y' + 0,48y = 0$ s'écrit également $y' = -0,48y$.

2. L'équation $y' + 0,48y = 0$ s'écrit également $y' = -0,48y$. Les solutions sont les fonctions de la forme :

2. L'équation $y' + 0,48y = 0$ s'écrit également $y' = -0,48y$. Les solutions sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-0,48t}} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Les solutions de (E_1) sont les fonctions qui s'écrivent comme la somme d'une solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de (E_1), c'est-à-dire les fonctions de la forme :

3. Les solutions de (E_1) sont les fonctions qui s'écrivent comme la somme d'une solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de (E_1), c'est-à-dire les fonctions de la forme :

$$\boxed{t \mapsto \lambda e^{-0,48t} + \frac{1}{120}} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Partie B

1. Supposons que p est solution de (E_2), c'est-à-dire que pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $p'(t) = \dfrac{1}{250}p(t) \times (120 - p(t))$.

1. Supposons que p est solution de (E_2), c'est-à-dire que pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $p'(t) = \dfrac{1}{250}p(t) \times (120 - p(t))$.

   On a alors, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $y(t) = \dfrac{1}{p(t)}$ donc :

1. Supposons que p est solution de (E_2), c'est-à-dire que pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $p'(t) = \dfrac{1}{250}p(t) \times (120 - p(t))$.
   On a alors, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $y(t) = \dfrac{1}{p(t)}$ donc :

$$y'(t) = -\frac{p'(t)}{p^2(t)}$$

Et donc :

$$y'(t) + 0,48y(t) =$$

Et donc :

$$y'(t) + 0,48y(t) = -\frac{p'(t)}{p^2(t)} + \frac{0,48}{p(t)}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} y'(t) + 0,48y(t) &= -\frac{p'(t)}{p^2(t)} + \frac{0,48}{p(t)} \\ &= \frac{-p'(t) + 0,48p(t)}{p^2(t)} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
y'(t) + 0,48y(t) &= -\frac{p'(t)}{p^2(t)} + \frac{0,48}{p(t)} \\
&= \frac{-p'(t) + 0,48p(t)}{p^2(t)} \\
&= \frac{-\frac{1}{250}p(t) \times (120 - p(t)) + 0,48p(t)}{p^2(t)}
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
y'(t)+0,48y(t) &= -\frac{p'(t)}{p^2(t)}+\frac{0,48}{p(t)} \\
&= \frac{-p'(t)+0,48p(t)}{p^2(t)} \\
&= \frac{-\frac{1}{250}p(t)\times(120-p(t))+0,48p(t)}{p^2(t)} \\
&= \frac{-0,48p(t)+\frac{1}{250}p^2(t)+0,48p(t)}{p^2(t)}
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
y'(t) + 0,48y(t) &= -\frac{p'(t)}{p^2(t)} + \frac{0,48}{p(t)} \\
&= \frac{-p'(t) + 0,48p(t)}{p^2(t)} \\
&= \frac{-\frac{1}{250}p(t) \times (120 - p(t)) + 0,48p(t)}{p^2(t)} \\
&= \frac{-0,48p(t) + \frac{1}{250}p^2(t) + 0,48p(t)}{p^2(t)} \\
&= \frac{p^2(t)}{250} \times \frac{1}{p^2(t)}
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
y'(t)+0,48y(t) &= -\frac{p'(t)}{p^2(t)}+\frac{0,48}{p(t)} \\
&= \frac{-p'(t)+0,48p(t)}{p^2(t)} \\
&= \frac{-\frac{1}{250}p(t)\times(120-p(t))+0,48p(t)}{p^2(t)} \\
&= \frac{-0,48p(t)+\frac{1}{250}p^2(t)+0,48p(t)}{p^2(t)} \\
&= \frac{p^2(t)}{250}\times\frac{1}{p^2(t)} \\
&= \frac{1}{250}
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
y'(t)+0,48y(t) &= -\frac{p'(t)}{p^2(t)}+\frac{0,48}{p(t)} \\
&= \frac{-p'(t)+0,48p(t)}{p^2(t)} \\
&= \frac{-\frac{1}{250}p(t)\times(120-p(t))+0,48p(t)}{p^2(t)} \\
&= \frac{-0,48p(t)+\frac{1}{250}p^2(t)+0,48p(t)}{p^2(t)} \\
&= \frac{p^2(t)}{250}\times\frac{1}{p^2(t)} \\
&= \frac{1}{250}
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{y \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_1)}$$

2. Les solutions de (E_2) sont donc les fonctions p telles que $p = \dfrac{1}{y}$ où y est une solution de (E_1).

2. Les solutions de (E_2) sont donc les fonctions p telles que $p = \dfrac{1}{y}$ où y est une solution de (E_1). Or on a vu qu'une fonction y est solution de (E_1) si et seulement si il existe une réel λ tel que, pour tout $t \in [0\,; +\infty[$:

$$y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-0{,}48t} + \frac{1}{120}$$

2. Les solutions de (E_2) sont donc les fonctions p telles que $p = \dfrac{1}{y}$ où y est une solution de (E_1). Or on a vu qu'une fonction y est solution de (E_1) si et seulement si il existe une réel λ tel que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

$$y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}$$

On a alors :

$$p(t) =$$

2. Les solutions de (E_2) sont donc les fonctions p telles que $p = \frac{1}{y}$ où y est une solution de (E_1). Or on a vu qu'une fonction y est solution de (E_1) si et seulement si il existe une réel λ tel que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

$$y(t) = \lambda e^{-0,48t} + \frac{1}{120}$$

On a alors :

$$p(t) = \frac{1}{\lambda e^{-0,48t} + \frac{1}{120}}$$

2. Les solutions de (E_2) sont donc les fonctions p telles que $p = \dfrac{1}{y}$ où y est une solution de (E_1). Or on a vu qu'une fonction y est solution de (E_1) si et seulement si il existe une réel λ tel que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

$$y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-0{,}48t} + \frac{1}{120}$$

On a alors :

$$p(t) = \frac{1}{\lambda \mathrm{e}^{-0{,}48t} + \frac{1}{120}} = \frac{1}{\frac{120\lambda \mathrm{e}^{-0{,}48t} + 1}{120}}$$

2. Les solutions de (E_2) sont donc les fonctions p telles que $p = \dfrac{1}{y}$ où y est une solution de (E_1). Or on a vu qu'une fonction y est solution de (E_1) si et seulement si il existe une réel λ tel que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

$$y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}$$

On a alors :

$$p(t) = \frac{1}{\lambda \mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}} = \frac{1}{\frac{120\lambda \mathrm{e}^{-0,48t} + 1}{120}} = \frac{120}{120\lambda \mathrm{e}^{-0,48t} + 1}$$

2. Les solutions de (E_2) sont donc les fonctions p telles que $p = \dfrac{1}{y}$ où y est une solution de (E_1). Or on a vu qu'une fonction y est solution de (E_1) si et seulement si il existe une réel λ tel que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

$$y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}$$

On a alors :

$$p(t) = \frac{1}{\lambda \mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}} = \frac{1}{\frac{120\lambda \mathrm{e}^{-0,48t} + 1}{120}} = \frac{120}{120\lambda \mathrm{e}^{-0,48t} + 1}$$

Soit, en posant $K = 120\lambda$:

2. Les solutions de (E_2) sont donc les fonctions p telles que $p = \frac{1}{y}$ où y est une solution de (E_1). Or on a vu qu'une fonction y est solution de (E_1) si et seulement si il existe une réel λ tel que, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

$$y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}$$

On a alors :

$$p(t) = \frac{1}{\lambda \mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}} = \frac{1}{\frac{120\lambda \mathrm{e}^{-0,48t} + 1}{120}} = \frac{120}{120\lambda \mathrm{e}^{-0,48t} + 1}$$

Soit, en posant $K = 120\lambda$:

$$\boxed{p(t) = \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^{-0,48t}}} \quad \text{avec } K \text{ une constante réelle}$$

3. On sait que $p(0) = 30$, on a alors :

3. On sait que $p(0) = 30$, on a alors :

$$p(0) = 30 \iff$$

3. On sait que $p(0) = 30$, on a alors :

$$p(0) = 30 \Longleftrightarrow \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^{0}} = 30$$

3. On sait que $p(0) = 30$, on a alors :

$$\begin{aligned} p(0) = 30 &\iff \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^0} = 30 \\ &\iff \frac{120}{1 + K} = 30 \end{aligned}$$

3. On sait que $p(0) = 30$, on a alors :

$$\begin{aligned} p(0) = 30 &\iff \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^0} = 30 \\ &\iff \frac{120}{1 + K} = 30 \\ &\iff 30(1 + K) = 120 \end{aligned}$$

3. On sait que $p(0) = 30$, on a alors :

$$\begin{aligned} p(0) = 30 &\iff \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^0} = 30 \\ &\iff \frac{120}{1 + K} = 30 \\ &\iff 30(1 + K) = 120 \\ &\iff 30K = 90 \end{aligned}$$

3. On sait que $p(0) = 30$, on a alors :

$$\begin{aligned} p(0) = 30 &\iff \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^0} = 30 \\ &\iff \frac{120}{1+K} = 30 \\ &\iff 30(1+K) = 120 \\ &\iff 30K = 90 \\ &\iff K = 3 \end{aligned}$$

3. On sait que $p(0) = 30$, on a alors :

$$\begin{aligned} p(0) = 30 &\iff \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^0} = 30 \\ &\iff \frac{120}{1 + K} = 30 \\ &\iff 30(1 + K) = 120 \\ &\iff 30K = 90 \\ &\iff K = 3 \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

$$\boxed{p(t) = \frac{120}{1 + 3\mathrm{e}^{-0,48t}}}$$

4. On a :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} p(t) = 120}$$

4. On a :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} p(t) = 120} \quad \text{car} \quad \lim_{t \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{-0,48t}\right) = 0$$

4. On a :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} p(t) = 120} \quad \text{car} \quad \lim_{t \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{-0,48t}\right) = 0$$

Cela signifie, qu'à long terme, la population de bactéries va se stabiliser autour de 120 000 individus.

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation $p(t) \geqslant 60$:

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation $p(t) \geqslant 60$:

$$p(t) \geqslant 60 \iff$$

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation $p(t) \geqslant 60$:

$$p(t) \geqslant 60 \Longleftrightarrow \frac{120}{1 + 3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60$$

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation $p(t) \geqslant 60$:

$$\begin{aligned} p(t) \geqslant 60 &\iff \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\ &\iff \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \end{aligned}$$

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation $p(t) \geqslant 60$:

$$\begin{aligned}
p(t) \geqslant 60 &\Longleftrightarrow \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\Longleftrightarrow \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\Longleftrightarrow \frac{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}}{120} \leqslant \frac{1}{60} \quad \textit{(passage à l'inverse)}
\end{aligned}$$

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation $p(t) \geqslant 60$:

$$\begin{aligned}
p(t) \geqslant 60 &\iff \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\iff \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\iff \frac{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}}{120} \leqslant \frac{1}{60} \quad \textit{(passage à l'inverse)} \\
&\iff 1+3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant \frac{120}{60}
\end{aligned}$$

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation $p(t) \geqslant 60$:

$$\begin{aligned}
p(t) \geqslant 60 &\iff \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\iff \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\iff \frac{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}}{120} \leqslant \frac{1}{60} \quad \textit{(passage à l'inverse)} \\
&\iff 1+3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant \frac{120}{60} \\
&\iff 1+3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant 2
\end{aligned}$$

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation $p(t) \geqslant 60$:

$$\begin{aligned}
p(t) \geqslant 60 &\iff \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\iff \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\iff \frac{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}}{120} \leqslant \frac{1}{60} \quad \textit{(passage à l'inverse)} \\
&\iff 1+3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant \frac{120}{60} \\
&\iff 1+3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant 2 \\
&\iff 3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant 1
\end{aligned}$$

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation $p(t) \geqslant 60$:

$$\begin{aligned}
p(t) \geqslant 60 &\iff \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\iff \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\iff \frac{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}}{120} \leqslant \frac{1}{60} \quad \textit{(passage à l'inverse)} \\
&\iff 1+3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant \frac{120}{60} \\
&\iff 1+3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant 2 \\
&\iff 3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant 1 \\
&\iff \mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation $p(t) \geqslant 60$:

$$\begin{aligned}
p(t) \geqslant 60 &\Longleftrightarrow \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0{,}48t}} \geqslant 60 \\
&\Longleftrightarrow \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0{,}48t}} \geqslant 60 \\
&\Longleftrightarrow \frac{1+3\mathrm{e}^{-0{,}48t}}{120} \leqslant \frac{1}{60} \quad \textit{(passage à l'inverse)} \\
&\Longleftrightarrow 1+3\mathrm{e}^{-0{,}48t} \leqslant \frac{120}{60} \\
&\Longleftrightarrow 1+3\mathrm{e}^{-0{,}48t} \leqslant 2 \\
&\Longleftrightarrow 3\mathrm{e}^{-0{,}48t} \leqslant 1 \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}48t} \leqslant \frac{1}{3} \\
&\Longleftrightarrow -0,48t \leqslant \ln\left(\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation $p(t) \geqslant 60$:

$$\begin{aligned}
p(t) \geqslant 60 &\Longleftrightarrow \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\Longleftrightarrow \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\Longleftrightarrow \frac{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}}{120} \leqslant \frac{1}{60} \quad \textit{(passage à l'inverse)} \\
&\Longleftrightarrow 1+3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant \frac{120}{60} \\
&\Longleftrightarrow 1+3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant 2 \\
&\Longleftrightarrow 3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant 1 \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant \frac{1}{3} \\
&\Longleftrightarrow -0,48t \leqslant \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\
&\Longleftrightarrow -0,48t \leqslant -\ln(3)
\end{aligned}$$

5. Il s'agit de résoudre l'inéquation $p(t) \geqslant 60$:

$$\begin{aligned}
p(t) \geqslant 60 &\iff \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\iff \frac{120}{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}} \geqslant 60 \\
&\iff \frac{1+3\mathrm{e}^{-0,48t}}{120} \leqslant \frac{1}{60} \quad \textit{(passage à l'inverse)} \\
&\iff 1+3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant \frac{120}{60} \\
&\iff 1+3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant 2 \\
&\iff 3\mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant 1 \\
&\iff \mathrm{e}^{-0,48t} \leqslant \frac{1}{3} \\
&\iff -0,48t \leqslant \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\
&\iff -0,48t \leqslant -\ln(3) \\
&\iff t \geqslant \frac{\ln(3)}{0,48}
\end{aligned}$$

Et $\dfrac{\ln(3)}{0,48} \approx 2,2888$

Et $\dfrac{\ln(3)}{0,48} \approx 2,2888$ donc la population de bactéries dépassera $60\,000$ individus au bout d'environ $2,2888$ heures, Et $\dfrac{\ln(3)}{0,48} \approx 2,2888$ donc la population de bactéries dépassera $60\,000$ individus au bout d'environ $2,2888$ heures, soit environ :

$$\boxed{\text{2 heures et 17 minutes}}$$

Tous les sujets corrigés avec sources LaTeX :

http://specialite.mathematiques.free.fr/

Pour toute remarque :

fabien.vinsu@ac-besancon.fr