Corrigé de l'épreuve du baccalauréat de spécialité mathématiques

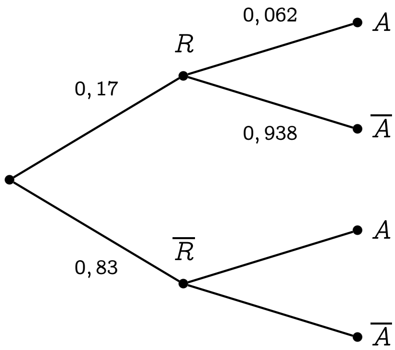
Polynésie
17 juin 2025

http://specialite.mathematiques.free.fr/
fabien.vinsu@ac-besancon.fr

Exercice 1 - Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



2. (a) Il s'agit de calculer $P(R \cap A)$:

2. (a) Il s'agit de calculer $P(R \cap A)$:

$$P(R \cap A) =$$

2. (a) Il s'agit de calculer $P(R \cap A)$:

$$P(R \cap A) = P(R) \times P_R(A)$$

2. (a) Il s'agit de calculer $P(R \cap A)$:

$$\begin{aligned} P(R \cap A) &= P(R) \times P_R(A) \\ &= 0,17 \times 0,062 \end{aligned}$$

2. (a) Il s'agit de calculer $P(R \cap A)$:

$$\begin{aligned} P(R \cap A) &= P(R) \times P_R(A) \\ &= 0,17 \times 0,062 \\ &= 0,01054 \end{aligned}$$

2. (a) Il s'agit de calculer $P(R \cap A)$:

$$\begin{aligned} P(R \cap A) &= P(R) \times P_R(A) \\ &= 0,17 \times 0,062 \\ &= 0,01054 \end{aligned}$$

La probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire est donc :

2. (a) Il s'agit de calculer $P(R \cap A)$:

$$\begin{aligned} P(R \cap A) &= P(R) \times P_R(A) \\ &= 0,17 \times 0,062 \\ &= 0,01054 \end{aligned}$$

La probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire est donc :

$$\boxed{P(R \cap A) = 0,01054}$$

2. (b) Il s'agit de calculer $P(\overline{R} \cap A)$.

2. (b) Il s'agit de calculer $P(\overline{R} \cap A)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

2. (b) Il s'agit de calculer $P(\overline{R} \cap A)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(R \cap A) + P(\overline{R} \cap A)$$

2. (b) Il s'agit de calculer $P(\overline{R} \cap A)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(R \cap A) + P(\overline{R} \cap A)$$

Or, d'après l'énoncé, $P(A) = 0,09$

2. (b) Il s'agit de calculer $P(\overline{R} \cap A)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(R \cap A) + P(\overline{R} \cap A)$$

Or, d'après l'énoncé, $P(A) = 0,09$ et, d'après la question précédente, $P(R \cap A) = 0,01054$.

2. (b) Il s'agit de calculer $P(\overline{R} \cap A)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(R \cap A) + P(\overline{R} \cap A)$$

Or, d'après l'énoncé, $P(A) = 0,09$ et, d'après la question précédente, $P(R \cap A) = 0,01054$. On en déduit l'égalité :

$$0,09 = 0,01054 + P(\overline{R} \cap A)$$

2. (b) Il s'agit de calculer $P(\overline{R} \cap A)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(R \cap A) + P(\overline{R} \cap A)$$

Or, d'après l'énoncé, $P(A) = 0,09$ et, d'après la question précédente, $P(R \cap A) = 0,01054$. On en déduit l'égalité :

$$0,09 = 0,01054 + P(\overline{R} \cap A)$$

Et donc :

$$P(\overline{R} \cap A) = 0,09 - 0,01054 = 0,07946$$

2. (b) Il s'agit de calculer $P(\overline{R} \cap A)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(R \cap A) + P(\overline{R} \cap A)$$

Or, d'après l'énoncé, $P(A) = 0,09$ et, d'après la question précédente, $P(R \cap A) = 0,01054$. On en déduit l'égalité :

$$0,09 = 0,01054 + P(\overline{R} \cap A)$$

Et donc :

$$P(\overline{R} \cap A) = 0,09 - 0,01054 = 0,07946$$

La probabilité que l'enfant interrogé habite en zone urbaine et soit atteint d'allergie alimentaire est donc :

2. (b) Il s'agit de calculer $P(\overline{R} \cap A)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(R \cap A) + P(\overline{R} \cap A)$$

Or, d'après l'énoncé, $P(A) = 0,09$ et, d'après la question précédente, $P(R \cap A) = 0,01054$. On en déduit l'égalité :

$$0,09 = 0,01054 + P(\overline{R} \cap A)$$

Et donc :

$$P(\overline{R} \cap A) = 0,09 - 0,01054 = 0,07946$$

La probabilité que l'enfant interrogé habite en zone urbaine et soit atteint d'allergie alimentaire est donc :

$$\boxed{P(\overline{R} \cap A) = 0,07946}$$

2. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(A)$:

2. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(A)$:

$$P_{\overline{R}}(A) =$$

2. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(A)$:

$$P_{\overline{R}}(A) = \frac{P(\overline{R} \cap A)}{P(\overline{R})}$$

2. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(A)$:

$$\begin{aligned} P_{\overline{R}}(A) &= \frac{P(\overline{R} \cap A)}{P(\overline{R})} \\ &= \frac{0,07946}{0,83} \end{aligned}$$

2. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(A)$:

$$\begin{aligned} P_{\overline{R}}(A) &= \frac{P(\overline{R} \cap A)}{P(\overline{R})} \\ &= \frac{0,07946}{0,83} \\ &\approx 0,0957 \end{aligned}$$

2. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(A)$:

$$\begin{aligned} P_{\overline{R}}(A) &= \frac{P(\overline{R} \cap A)}{P(\overline{R})} \\ &= \frac{0,07946}{0,83} \\ &\approx 0,0957 \end{aligned}$$

La probabilité que l'enfant soit atteint d'allergie alimentaire sachant qu'il habite en zone urbaine est :

2. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(A)$:

$$\begin{aligned}P_{\overline{R}}(A) &= \frac{P(\overline{R}\cap A)}{P(\overline{R})}\\ &= \frac{0,07946}{0,83}\\ &\approx 0,0957\end{aligned}$$

La probabilité que l'enfant soit atteint d'allergie alimentaire sachant qu'il habite en zone urbaine est :

$$\boxed{P_{\overline{R}}(A) \approx 0,0957}$$

Partie B

1. On répète 100 fois une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (l'enfant est atteint d'allergie alimentaire) est égale à $0,09$

Partie B

1. On répète 100 fois une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (l'enfant est atteint d'allergie alimentaire) est égale à $0,09$ et X compte le nombre de succès. On en déduit que :

1. On répète 100 fois une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (l'enfant est atteint d'allergie alimentaire) est égale à $0,09$ et X compte le nombre de succès. On en déduit que :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 100 \text{ et } p = 0,09}$$

2. Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 10)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice,

2. Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 10)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 soient atteints d'allergie alimentaire est :

2. Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 10)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 soient atteints d'allergie alimentaire est :

$$\boxed{P(X \geqslant 10) \approx 0,4125}$$

Partie C

1. La variable aléatoire M_{20} représente :

Partie C

1. La variable aléatoire M_{20} représente :

$$\boxed{\text{L'âge moyen d'appartition des premiers symptômes}}$$

2. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$.

2. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. L'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne M_{20} sont alors données par les formules

2. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. L'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne M_{20} sont alors données par les formules $E(M_{20}) =$

2. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. L'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne M_{20} sont alors données par les formules $E(M_{20}) = \mu$

2. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. L'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne M_{20} sont alors données par les formules $E(M_{20}) = \mu = 4$

2. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. L'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne M_{20} sont alors données par les formules $E(M_{20}) = \mu = 4$ et

$V(M_{20}) =$

2. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. L'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne M_{20} sont alors données par les formules $E(M_{20}) = \mu = 4$ et
$V(M_{20}) = \dfrac{1}{20}$

2. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. L'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne M_{20} sont alors données par les formules $E(M_{20}) = \mu = 4$ et
$V(M_{20}) = \frac{1}{20} = \frac{2,25}{20}$

2. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. L'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne M_{20} sont alors données par les formules $E(M_{20}) = \mu = 4$ et
$V(M_{20}) = \frac{1}{20} = \frac{2,25}{20} = 0,1125,$

2. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. L'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne M_{20} sont alors données par les formules $E(M_{20}) = \mu = 4$ et $V(M_{20}) = \frac{1}{20} = \frac{2,25}{20} = 0,1125$, soit :

$$\boxed{E(M_{20}) = 4} \quad \text{et} \quad \boxed{V(M_{20}) = 0,1125}$$

3. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$.

3. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. On a alors, d'après l'inégalité de concentration, pour tout $\delta > 0$:

3. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. On a alors, d'après l'inégalité de concentration, pour tout $\delta > 0$:

$$P\left(|M_{20} - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

3. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. On a alors, d'après l'inégalité de concentration, pour tout $\delta > 0$:

$$P\left(|M_{20} - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Soit, en prenant $\delta = 2$:

3. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. On a alors, d'après l'inégalité de concentration, pour tout $\delta > 0$:

$$P\left(|M_{20} - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Soit, en prenant $\delta = 2$:

$$P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant \frac{2,25}{20 \times 2^2}$$

3. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. On a alors, d'après l'inégalité de concentration, pour tout $\delta > 0$:

$$P\left(|M_{20} - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Soit, en prenant $\delta = 2$:

$$P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant \frac{2,25}{20 \times 2^2}$$

Donc :

$$P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant 0,028125$$

3. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. On a alors, d'après l'inégalité de concentration, pour tout $\delta > 0$:

$$P\left(|M_{20} - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Soit, en prenant $\delta = 2$:

$$P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant \frac{2,25}{20 \times 2^2}$$

Donc :

$$P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant 0,028125$$

Et, en passant à l'événement contraire :

3. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. On a alors, d'après l'inégalité de concentration, pour tout $\delta > 0$:

$$P\left(|M_{20} - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Soit, en prenant $\delta = 2$:

$$P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant \frac{2,25}{20 \times 2^2}$$

Donc :

$$P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant 0,028125$$

Et, en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|M_{20} - 4| < 2\right) \geqslant 1 - 0,028125$$

3. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. On a alors, d'après l'inégalité de concentration, pour tout $\delta > 0$:

$$P(|M_{20} - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Soit, en prenant $\delta = 2$:

$$P(|M_{20} - 4| \geqslant 2) \leqslant \frac{2,25}{20 \times 2^2}$$

Donc :

$$P(|M_{20} - 4| \geqslant 2) \leqslant 0,028125$$

Et, en passant à l'événement contraire :

$$P(|M_{20} - 4| < 2) \geqslant 1 - 0,028125$$

Soit :

$$P(2 < M_{20} < 6) \geqslant 0,971875$$

3. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. On a alors, d'après l'inégalité de concentration, pour tout $\delta > 0$:

$$P\left(|M_{20} - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Soit, en prenant $\delta = 2$:

$$P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant \frac{2,25}{20 \times 2^2}$$

Donc :

$$P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant 0,028125$$

Et, en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|M_{20} - 4| < 2\right) \geqslant 1 - 0,028125$$

Soit :

$$P\left(2 < M_{20} < 6\right) \geqslant 0,971875$$

Et comme $0,971875 > 0,97$, on en déduit :

3. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. On a alors, d'après l'inégalité de concentration, pour tout $\delta > 0$:

$$P\left(|M_{20} - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Soit, en prenant $\delta = 2$:

$$P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant \frac{2,25}{20 \times 2^2}$$

Donc :

$$P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant 0,028125$$

Et, en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|M_{20} - 4| < 2\right) \geqslant 1 - 0,028125$$

Soit :

$$P\left(2 < M_{20} < 6\right) \geqslant 0,971875$$

Et comme $0,971875 > 0,97$, on en déduit :

$$\boxed{P(2 < M_{20} < 6) > 0,97}$$

3. Les variables aléatoires A_1, A_2, ..., A_{20} sont indépendantes et identiques de même loi d'espérance $\mu = 4$ et de variance $V = 2,25$. On a alors, d'après l'inégalité de concentration, pour tout $\delta > 0$:

$$P\left(|M_{20} - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Soit, en prenant $\delta = 2$:

$$P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant \frac{2,25}{20 \times 2^2}$$

Donc :

$$P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant 0,028125$$

Et, en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|M_{20} - 4| < 2\right) \geqslant 1 - 0,028125$$

Soit :

$$P\left(2 < M_{20} < 6\right) \geqslant 0,971875$$

Et comme $0,971875 > 0,97$, on en déduit :

$$\boxed{P(2 < M_{20} < 6) > 0,97}$$

Cela signifie que l'âge moyen d'appartition des premiers symptômes est compris entre 2 ans et 6 ans avec une probabilité strictement supérieure à $0,97$.

Exercice 2

1. Il s'agit de déterminer les coordonnées du point de paramètre t tel que $z = 0$,

1. Il s'agit de déterminer les coordonnées du point de paramètre t tel que $z = 0$, soit tel que $11 - 4t = 0$.

Exercice 2

1. Il s'agit de déterminer les coordonnées du point de paramètre t tel que $z = 0$, soit tel que $11 - 4t = 0$. Or $11 - 4t = 0 \Longleftrightarrow t = \dfrac{11}{4}$.

Exercice 2

1. Il s'agit de déterminer les coordonnées du point de paramètre t tel que $z = 0$, soit tel que $11 - 4t = 0$. Or $11 - 4t = 0 \Longleftrightarrow t = \dfrac{11}{4}$. Et on a alors :

Exercice 2

1. Il s'agit de déterminer les coordonnées du point de paramètre t tel que $z = 0$, soit tel que $11 - 4t = 0$. Or $11 - 4t = 0 \iff t = \dfrac{11}{4}$. Et on a alors :

$$\begin{cases} x = -11 + 5 \times \dfrac{11}{4} = \dfrac{11}{4} \\ y = -5 + \dfrac{11}{4} = -\dfrac{9}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

1. Il s'agit de déterminer les coordonnées du point de paramètre t tel que $z = 0$, soit tel que $11 - 4t = 0$. Or $11 - 4t = 0 \iff t = \dfrac{11}{4}$. Et on a alors :

$$\begin{cases} x = -11 + 5 \times \dfrac{11}{4} = \dfrac{11}{4} \\ y = -5 + \dfrac{11}{4} = -\dfrac{9}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{S\left(\frac{11}{4}\,;-\frac{9}{4}\,;0\right)}$$

2. (a) La droite d_A passe par le point $A(-7\,;1\,;7)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

2. (a) La droite d_A passe par le point $A(-7\,;1\,;7)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

2. (a) La droite d_A passe par le point $A(-7\,;1\,;7)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = -7 + 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = 7 - 3t' \end{cases} \qquad \text{avec } t' \in \mathbb{R}}$$

2. (b) Il s'agit d'étudier l'intersection des droites d_A et d_B :

2. (b) Il s'agit d'étudier l'intersection des droites d_A et d_B :

$$\begin{cases} -11 + 5t = -7 + 2t' \\ -5 + t = 1 - t' \\ 11 - 4t = 7 - 3t' \end{cases} \iff$$

2. (b) Il s'agit d'étudier l'intersection des droites d_A et d_B :

$$\begin{cases} -11+5t=-7+2t' \\ -5+t=1-t' \\ 11-4t=7-3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -11+5(6-t')=-7+2t' \\ t=6-t' \\ 11-4(6-t')=7-3t' \end{cases}$$

2. (b) Il s'agit d'étudier l'intersection des droites d_A et d_B :

$$\begin{cases} -11+5t=-7+2t' \\ -5+t=1-t' \\ 11-4t=7-3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -11+5(6-t')=-7+2t' \\ t=6-t' \\ 11-4(6-t')=7-3t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -11+30-5t'=-7+2t' \\ t=6-t' \\ 11-24+4t'=7-3t' \end{cases}$$

2. (b) Il s'agit d'étudier l'intersection des droites d_A et d_B :

$$\begin{cases} -11+5t = -7+2t' \\ -5+t = 1-t' \\ 11-4t = 7-3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -11+5(6-t') = -7+2t' \\ t = 6-t' \\ 11-4(6-t') = 7-3t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -11+30-5t' = -7+2t' \\ t = 6-t' \\ 11-24+4t' = 7-3t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 7t' = 26 \\ t = 6-t' \\ 7t' = 20 \end{cases}$$

2. (b) Il s'agit d'étudier l'intersection des droites d_A et d_B :

$$\begin{cases} -11+5t=-7+2t' \\ -5+t=1-t' \\ 11-4t=7-3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -11+5(6-t')=-7+2t' \\ t=6-t' \\ 11-4(6-t')=7-3t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -11+30-5t'=-7+2t' \\ t=6-t' \\ 11-24+4t'=7-3t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 7t'=26 \\ t=6-t' \\ 7t'=20 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t'=\dfrac{26}{7} \\ t=6-t' \\ t'=\dfrac{20}{7} \end{cases}$$

2. (b) Il s'agit d'étudier l'intersection des droites d_A et d_B :

$$\begin{cases} -11+5t=-7+2t' \\ -5+t=1-t' \\ 11-4t=7-3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -11+5(6-t')=-7+2t' \\ t=6-t' \\ 11-4(6-t')=7-3t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -11+30-5t'=-7+2t' \\ t=6-t' \\ 11-24+4t'=7-3t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 7t'=26 \\ t=6-t' \\ 7t'=20 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t'=\dfrac{26}{7} \\ t=6-t' \\ t'=\dfrac{20}{7} \end{cases}$$

Ce système n'admet aucune solution donc les deux droites ne sont pas sécantes.

2. (b) Il s'agit d'étudier l'intersection des droites d_A et d_B :

$$\begin{cases} -11+5t=-7+2t' \\ -5+t=1-t' \\ 11-4t=7-3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -11+5(6-t')=-7+2t' \\ t=6-t' \\ 11-4(6-t')=7-3t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -11+30-5t'=-7+2t' \\ t=6-t' \\ 11-24+4t'=7-3t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 7t'=26 \\ t=6-t' \\ 7t'=20 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t'=\dfrac{26}{7} \\ t=6-t' \\ t'=\dfrac{20}{7} \end{cases}$$

Ce système n'admet aucune solution donc les deux droites ne sont pas sécantes. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Les deux avions ne peuvent pas entrer en collision}}$$

3. (a) Le point $E(-3\,;-1\,;1)$ est le point de paramètre $t' = 2$ dans la représentation paramétrique de la droite d_A donnée précédemment

3. (a) Le point $E(-3\,;-1\,;1)$ est le point de paramètre $t' = 2$ dans la représentation paramétrique de la droite d_A donnée précédemment donc :

$$\boxed{\text{L'avion Alpha passe par la position } E(-3\,;-1\,;1)}$$

3. (b) Le plan d'équation cartésienne $2x - y - 3z + 8 = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. (b) Le plan d'équation cartésienne $2x - y - 3z + 8 = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Or il s'agit du vecteur $\overrightarrow{u}$ qui est un vecteur directeur de la droite d_A.

3. (b) Le plan d'équation cartésienne $2x - y - 3z + 8 = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Or il s'agit du vecteur $\overrightarrow{u}$ qui est un vecteur directeur de la droite d_A. Ce plan est donc perpendiculaire à la droite d_A.

3. (b) Le plan d'équation cartésienne $2x - y - 3z + 8 = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Or il s'agit du vecteur $\overrightarrow{u}$ qui est un vecteur directeur de la droite d_A. Ce plan est donc perpendiculaire à la droite d_A. De plus, les coordonnées du point E vérifient l'équation de ce plan,

3. (b) Le plan d'équation cartésienne $2x - y - 3z + 8 = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Or il s'agit du vecteur $\overrightarrow{u}$ qui est un vecteur directeur de la droite d_A. Ce plan est donc perpendiculaire à la droite d_A. De plus, les coordonnées du point E vérifient l'équation de ce plan, en effet
$2 \times (-3) - (-1) - 3 \times 1 + 8 =$

3. (b) Le plan d'équation cartésienne $2x - y - 3z + 8 = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Or il s'agit du vecteur $\overrightarrow{u}$ qui est un vecteur directeur de la droite d_A. Ce plan est donc perpendiculaire à la droite d_A. De plus, les coordonnées du point E vérifient l'équation de ce plan, en effet
$2 \times (-3) - (-1) - 3 \times 1 + 8 = -6 + 1 - 3 + 8$

3. (b) Le plan d'équation cartésienne $2x - y - 3z + 8 = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Or il s'agit du vecteur $\overrightarrow{u}$ qui est un vecteur directeur de la droite d_A. Ce plan est donc perpendiculaire à la droite d_A. De plus, les coordonnées du point E vérifient l'équation de ce plan, en effet
$2 \times (-3) - (-1) - 3 \times 1 + 8 = -6 + 1 - 3 + 8 = 0$.

3. (b) Le plan d'équation cartésienne $2x - y - 3z + 8 = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Or il s'agit du vecteur $\overrightarrow{u}$ qui est un vecteur directeur de la droite d_A. Ce plan est donc perpendiculaire à la droite d_A. De plus, les coordonnées du point E vérifient l'équation de ce plan, en effet
$2 \times (-3) - (-1) - 3 \times 1 + 8 = -6 + 1 - 3 + 8 = 0$. On en déduit que le plan P_E passant par E et perpendiculaire à la droite d_A admet pour équation cartésienne :

3. (b) Le plan d'équation cartésienne $2x - y - 3z + 8 = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Or il s'agit du vecteur $\overrightarrow{u}$ qui est un vecteur directeur de la droite d_A. Ce plan est donc perpendiculaire à la droite d_A. De plus, les coordonnées du point E vérifient l'équation de ce plan, en effet $2 \times (-3) - (-1) - 3 \times 1 + 8 = -6 + 1 - 3 + 8 = 0$. On en déduit que le plan P_E passant par E et perpendiculaire à la droite d_A admet pour équation cartésienne :

$$\boxed{2x - y - 3z + 8 = 0}$$

3. (c) On peut vérifier que :

- Le point $F(-1\,;\,-3\,;\,3)$ appartient au plan P_E,

3. (c) On peut vérifier que :

- Le point $F(-1\,;-3\,;3)$ appartient au plan P_E, en effet $2 \times (-1) - (-3) - 3 \times 3 + 8 =$

3. (c) On peut vérifier que :

- Le point $F(-1\,;-3\,;3)$ appartient au plan P_E, en effet $2\times(-1)-(-3)-3\times3+8=-2+3-9+8$

3. (c) On peut vérifier que :

- Le point $F(-1\,;\,-3\,;\,3)$ appartient au plan P_E, en effet $2\times(-1)-(-3)-3\times 3+8=\ -2+3-9+8=0$

3. (c) On peut vérifier que :

- Le point $F(-1\,;-3\,;3)$ appartient au plan P_E, en effet $2\times(-1)-(-3)-3\times3+8= -2+3-9+8=0$ donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

3. (c) On peut vérifier que :

- Le point $F(-1\,;\,-3\,;\,3)$ appartient au plan P_E, en effet $2\times(-1)-(-3)-3\times 3+8=\;-2+3-9+8=0$ donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan.
- Le point $F(-1\,;\,-3\,;\,3)$ appartient à la droite d_B,

3. (c) On peut vérifier que :

- Le point $F(-1\,;\,-3\,;\,3)$ appartient au plan P_E, en effet $2\times(-1)-(-3)-3\times 3+8=\,-2+3-9+8=0$ donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan.
- Le point $F(-1\,;\,-3\,;\,3)$ appartient à la droite d_B, en effet il s'agit du point de paramètre $t=2$ dans la représentation paramétrique donnée dans l'énoncé.

3. (c) On peut vérifier que :

- Le point $F(-1\,;\,-3\,;\,3)$ appartient au plan P_E, en effet $2 \times (-1) - (-3) - 3 \times 3 + 8 = -2 + 3 - 9 + 8 = 0$ donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan.
- Le point $F(-1\,;\,-3\,;\,3)$ appartient à la droite d_B, en effet il s'agit du point de paramètre $t = 2$ dans la représentation paramétrique donnée dans l'énoncé.

On en déduit que :

3. (c) On peut vérifier que :

- Le point $F(-1\,;\,-3\,;\,3)$ appartient au plan P_E, en effet $2\times(-1)-(-3)-3\times 3+8 = -2+3-9+8=0$ donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan.
- Le point $F(-1\,;\,-3\,;\,3)$ appartient à la droite d_B, en effet il s'agit du point de paramètre $t=2$ dans la représentation paramétrique donnée dans l'énoncé.

On en déduit que :

$$\boxed{F(-1\,;\,-3\,;\,3) \text{ est le point d'intersection du plan } P_E \text{ et de la droite } d_B}$$

3. (d) On a :

$$EF =$$

3. (d) On a :

$$EF = \sqrt{(-1+3)^2 + (-3+1)^2 + (3-1)^2}$$

3. (d) On a :

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{(-1+3)^2 + (-3+1)^2 + (3-1)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

3. (d) On a :

$$\begin{aligned}EF &= \sqrt{(-1+3)^2+(-3+1)^2+(3-1)^2} \\ &= \sqrt{2^2+(-2)^2+2^2} \\ &= \sqrt{4+4+4}\end{aligned}$$

3. (d) On a :

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{(-1+3)^2+(-3+1)^2+(3-1)^2} \\ &= \sqrt{2^2+(-2)^2+2^2} \\ &= \sqrt{4+4+4} \\ &= \sqrt{12} \end{aligned}$$

3. (d) On a :

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{(-1+3)^2 + (-3+1)^2 + (3-1)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{4+4+4} \\ &= \sqrt{12} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

3. (d) On a :

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{(-1+3)^2+(-3+1)^2+(3-1)^2} \\ &= \sqrt{2^2+(-2)^2+2^2} \\ &= \sqrt{4+4+4} \\ &= \sqrt{12} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{EF = 2\sqrt{3} \approx 3,464}$$

3. (d) On a :

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{(-1+3)^2+(-3+1)^2+(3-1)^2} \\ &= \sqrt{2^2+(-2)^2+2^2} \\ &= \sqrt{4+4+4} \\ &= \sqrt{12} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{EF = 2\sqrt{3} \approx 3,464}$$

Soit une distance d'environ 3 464 m.

4. On a vu que si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, la distance qui les sépare est d'environ 3 464 m.

4. On a vu que si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, la distance qui les sépare est d'environ 3 464 m. Or une distance de 3 milles nautiques correspond à une distance de 5 556 m

4. On a vu que si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, la distance qui les sépare est d'environ 3 464 m. Or une distance de 3 milles nautiques correspond à une distance de 5 556 m donc :

$$\boxed{\text{La distance de sécurité n'est pas respectée}}$$

1. (a) La fonction f_n est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

1. (a) La fonction f_n est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$f_n'(x) =$$

Exercice 3 - Partie A

1. (a) La fonction f_n est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$f_n'(x) = nx^{n-1} \times \mathrm{e}^{-x} + x^n \times (-\mathrm{e}^{-x})$$

Exercice 3 - Partie A

1. (a) La fonction f_n est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1} \times \mathrm{e}^{-x} + x^n \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} - x \times x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Exercice 3 - Partie A

1. (a) La fonction f_n est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1} \times \mathrm{e}^{-x} + x^n \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} - x \times x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} \\ &= (n-x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

1. (a) La fonction f_n est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1} \times \mathrm{e}^{-x} + x^n \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} - x \times x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} \\ &= (n-x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f_n'(x) = (n-x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}}$$

1. (b) Justifions les différents éléments :

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,; +\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n - x$.

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n - x$. De plus $n - x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant n$.

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n - x$. De plus $n - x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant n$. On en déduit le signe de f_n'

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n-x$. De plus $n-x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant n$. On en déduit le signe de f_n' et donc les variations de f_n.

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n - x$. De plus $n - x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant n$. On en déduit le signe de f_n' et donc les variations de f_n.
- $f_n(0) =$

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n-x$. De plus $n-x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant n$. On en déduit le signe de f_n' et donc les variations de f_n.
- $f_n(0) = 0^n\mathrm{e}^0$

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n - x$. De plus $n - x \geqslant 0 \iff x \leqslant n$. On en déduit le signe de f_n' et donc les variations de f_n.
- $f_n(0) = 0^n\mathrm{e}^0 = 0$.

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $e^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n-x$. De plus $n-x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant n$. On en déduit le signe de f_n' et donc les variations de f_n.
- $f_n(0) = 0^n e^0 = 0$.
- $f_n(n) =$

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n-x$. De plus $n-x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant n$. On en déduit le signe de f_n' et donc les variations de f_n.
- $f_n(0) = 0^n\mathrm{e}^0 = 0$.
- $f_n(n) = n^n\mathrm{e}^{-n}$

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $e^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n - x$. De plus $n - x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant n$. On en déduit le signe de f_n' et donc les variations de f_n.
- $f_n(0) = 0^n e^0 = 0$.
- $f_n(n) = n^n e^{-n} = \dfrac{n^n}{e^n}$

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,; +\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n - x$. De plus $n - x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant n$. On en déduit le signe de f_n' et donc les variations de f_n.
- $f_n(0) = 0^n \mathrm{e}^0 = 0$.
- $f_n(n) = n^n \mathrm{e}^{-n} = \dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n} = \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $e^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n-x$. De plus $n-x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant n$. On en déduit le signe de f_n' et donc les variations de f_n.
- $f_n(0) = 0^n e^0 = 0$.
- $f_n(n) = n^n e^{-n} = \dfrac{n^n}{e^n} = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.
- Par croissances comparées,

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n-x$. De plus $n-x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant n$. On en déduit le signe de f_n' et donc les variations de f_n.
- $f_n(0) = 0^n\mathrm{e}^0 = 0$.
- $f_n(n) = n^n\mathrm{e}^{-n} = \dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n} = \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.
- Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} =$

1. (b) Justifions les différents éléments :

- Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n-x$. De plus $n-x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant n$. On en déduit le signe de f_n' et donc les variations de f_n.
- $f_n(0) = 0^n\mathrm{e}^0 = 0$.
- $f_n(n) = n^n\mathrm{e}^{-n} = \dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n} = \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.
- Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$.

2. On a :

$$f_n(1) =$$

2. On a :

$$f_n(1) = 1^n \mathrm{e}^{-1}$$

2. On a :

$$f_n(1) = 1^n \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}$$

2. On a :

$$f_n(1) = 1^n \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point } A\left(1\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right) \text{ appartient à la courbe } \mathscr{C}_n}$$

Partie B

1. (a) I_n correspond à l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses,

Partie B

1. (a) I_n correspond à l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$

1. (a) I_n correspond à l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

1. (b) Lorsque n devient grand, courbe $\mathscr{C}_n$ semble « s'écraser » de plus en plus.

1. (b) Lorsque n devient grand, courbe $\mathscr{C}_n$ semble « s'écraser » de plus en plus. On peut conjecturer que l'aire sous la courbe se rapproche de 0,

1. (b) Lorsque n devient grand, courbe $\mathscr{C}_n$ semble « s'écraser » de plus en plus. On peut conjecturer que l'aire sous la courbe se rapproche de 0, c'est-à-dire que :

1. (b) Lorsque n devient grand, courbe $\mathscr{C}_n$ semble « s'écraser » de plus en plus. On peut conjecturer que l'aire sous la courbe se rapproche de 0, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

2. On a :

$$I_0 =$$

2. On a :

$$I_0 = \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x$$

2. On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{0} \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{0} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^0 \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I_0 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}}$$

3. (a) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a :

3. (a) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a :

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

3. (a) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a :

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

Donc, en multipliant par x^n, qui est positif, on obtient :

3. (a) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a :

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

Donc, en multipliant par x^n, qui est positif, on obtient :

$$\boxed{0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n}$$

3. (b) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a, en multipliant les membres de l'encadrement précédent par e^{-x} qui est positif :

3. (b) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a, en multipliant les membres de l'encadrement précédent par e^{-x} qui est positif :

$$0 \leqslant x^{n+1}\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^{n}\mathrm{e}^{-x}$$

3. (b) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a, en multipliant les membres de l'encadrement précédent par e^{-x} qui est positif :

$$0 \leqslant x^{n+1}\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^{n}\mathrm{e}^{-x}$$

Puis, par croissance de l'intégrale :

3. (b) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a, en multipliant les membres de l'encadrement précédent par e^{-x} qui est positif :

$$0 \leqslant x^{n+1}\text{e}^{-x} \leqslant x^n\text{e}^{-x}$$

Puis, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0\,\text{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\text{e}^{-x}\,\text{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\text{e}^{-x}\,\text{d}x$$

3. (b) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a, en multipliant les membres de l'encadrement précédent par e^{-x} qui est positif :

$$0 \leqslant x^{n+1}\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^{n}\mathrm{e}^{-x}$$

Puis, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Soit :

$$\boxed{0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n}$$

4. D'après la question précédente :

4. D'après la question précédente :
    - La suite (I_n) est décroissante

4. D'après la question précédente :
   - La suite (I_n) est décroissante (car $I_{n+1} \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

4. D'après la question précédente :
   - La suite (I_n) est décroissante (car $I_{n+1} \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   - La suite (I_n) est minorée par 0

4. D'après la question précédente :

- La suite (I_n) est décroissante (car $I_{n+1} \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
- La suite (I_n) est minorée par 0 (car $0 \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

4. D'après la question précédente :
   - La suite (I_n) est décroissante (car $I_{n+1} \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   - La suite (I_n) est minorée par 0 (car $0 \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

   On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est convergente vers une limite } \ell \geqslant 0}$$

5. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

5. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

5. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^{n} \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

5. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^{n} \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

5. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^{n} \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

5. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^{n} \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^{n}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

5. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^{n} \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^{n}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + (n+1)\int_0^1 x^{n}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

5. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + (n+1)\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n \end{aligned}$$

5. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^{n} \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^{n}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + (n+1)\int_0^1 x^{n}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}}$$

6. (a) Supposons que $\ell > 0$, alors on a :

6. (a) Supposons que $\ell > 0$, alors on a :

$$\lim_{n \to +\infty} I_{n+1} = \ell$$

6. (a) Supposons que $\ell > 0$, alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left((n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}} \right) = +\infty$$

6. (a) Supposons que $\ell > 0$, alors on a :

$$\lim_{n \to +\infty} I_{n+1} = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \left((n+1) I_n - \frac{1}{\mathrm{e}} \right) = +\infty$$

Ce qui est en contradiction avec un passage à la limite dans l'égalité précédente.

6. (b) On sait que $\ell \geqslant 0$

6. (b) On sait que $\ell \geqslant 0$ et, d'après la question précédente, ℓ n'est pas strictement supérieure à 0.

6. (b) On sait que $\ell \geqslant 0$ et, d'après la question précédente, ℓ n'est pas strictement supérieure à 0. On en déduit que :

$$\boxed{\ell = 0}$$

7. La commande `mystere(100)` renvoie une liste

7. La commande `mystere(100)` renvoie une liste contenant les valeurs des intégrales I_n pour n variant de 0 à 100.

1. **Affirmation 1 : Vrai**

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Il s'agit d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 4$.

Exercice 4

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Il s'agit d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 4$. Les solutions sont donc les fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

Exercice 4

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Il s'agit d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 4$. Les solutions sont donc les fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :
   $$f(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

1. **Affirmation 1 : Vrai**
Il s'agit d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 4$. Les solutions sont donc les fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Or $\dfrac{b}{a} =$

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Il s'agit d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = 4$. Les solutions sont donc les fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

   $$f(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

   Or $\frac{b}{a} = \frac{4}{\frac{1}{2}}$

Exercice 4

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Il s'agit d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 4$. Les solutions sont donc les fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

   $$f(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

   Or $\dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} = 4 \times 2$

Exercice 4

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Il s'agit d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 4$. Les solutions sont donc les fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

   Or $\dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} = 4 \times 2 = 8$

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Il s'agit d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 4$. Les solutions sont donc les fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

   Or $\dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} = 4 \times 2 = 8$ donc les solutions sont les fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

Exercice 4

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Il s'agit d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 4$. Les solutions sont donc les fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

   Or $\dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} = 4 \times 2 = 8$ donc les solutions sont les fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 8 \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

2. **Affirmation 2 : Vrai**

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   - On choisit 3 filles parmi 18, le nombre de possibilités pour le choix des 3 filles est donc :

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   - On choisit 3 filles parmi 18, le nombre de possibilités pour le choix des 3 filles est donc :

$$\binom{18}{3} =$$

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   - On choisit 3 filles parmi 18, le nombre de possibilités pour le choix des 3 filles est donc :

$$\binom{18}{3} = \frac{18!}{3! \times 15!}$$

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   - On choisit 3 filles parmi 18, le nombre de possibilités pour le choix des 3 filles est donc :

$$\binom{18}{3} = \frac{18!}{3! \times 15!} = 816$$

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   - On choisit 3 filles parmi 18, le nombre de possibilités pour le choix des 3 filles est donc :

$$\binom{18}{3} = \frac{18!}{3! \times 15!} = 816$$

   - On choisit 3 garçons parmi 14, le nombre de possibilités pour le choix des 3 garçons est donc :

2. **Affirmation 2 : Vrai**

- On choisit 3 filles parmi 18, le nombre de possibilités pour le choix des 3 filles est donc :

$$\binom{18}{3} = \frac{18!}{3! \times 15!} = 816$$

- On choisit 3 garçons parmi 14, le nombre de possibilités pour le choix des 3 garçons est donc :

$$\binom{14}{3} =$$

2. **Affirmation 2 : Vrai**

- On choisit 3 filles parmi 18, le nombre de possibilités pour le choix des 3 filles est donc :

$$\binom{18}{3} = \frac{18!}{3! \times 15!} = 816$$

- On choisit 3 garçons parmi 14, le nombre de possibilités pour le choix des 3 garçons est donc :

$$\binom{14}{3} = \frac{14!}{3! \times 11!}$$

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   - On choisit 3 filles parmi 18, le nombre de possibilités pour le choix des 3 filles est donc :

$$\binom{18}{3} = \frac{18!}{3! \times 15!} = 816$$

   - On choisit 3 garçons parmi 14, le nombre de possibilités pour le choix des 3 garçons est donc :

$$\binom{14}{3} = \frac{14!}{3! \times 11!} = 364$$

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   - On choisit 3 filles parmi 18, le nombre de possibilités pour le choix des 3 filles est donc :

$$\binom{18}{3} = \frac{18!}{3! \times 15!} = 816$$

   - On choisit 3 garçons parmi 14, le nombre de possibilités pour le choix des 3 garçons est donc :

$$\binom{14}{3} = \frac{14!}{3! \times 11!} = 364$$

   - Le nombre de possibiliités pour la constitution de l'équipe est donc :

2. **Affirmation 2 : Vrai**

- On choisit 3 filles parmi 18, le nombre de possibilités pour le choix des 3 filles est donc :

$$\binom{18}{3} = \frac{18!}{3! \times 15!} = 816$$

- On choisit 3 garçons parmi 14, le nombre de possibilités pour le choix des 3 garçons est donc :

$$\binom{14}{3} = \frac{14!}{3! \times 11!} = 364$$

- Le nombre de possibiliités pour la constitution de l'équipe est donc :

$$816 \times 364 =$$

2. **Affirmation 2 : Vrai**

- On choisit 3 filles parmi 18, le nombre de possibilités pour le choix des 3 filles est donc :

$$\binom{18}{3} = \frac{18!}{3! \times 15!} = 816$$

- On choisit 3 garçons parmi 14, le nombre de possibilités pour le choix des 3 garçons est donc :

$$\binom{14}{3} = \frac{14!}{3! \times 11!} = 364$$

- Le nombre de possibiliités pour la constitution de l'équipe est donc :

$$816 \times 364 = 297\,024$$

3. **Affirmation 3 : Vrai**

3. **Affirmation 3 : Vrai**

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

3. **Affirmation 3 : Vrai**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

Donc :

$$1 \leqslant 2 + \cos(n) \leqslant 3$$

3. **Affirmation 3 : Vrai**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

Donc :

$$1 \leqslant 2 + \cos(n) \leqslant 3$$

Puis, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante :

3. **Affirmation 3 : Vrai**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

Donc :

$$1 \leqslant 2 + \cos(n) \leqslant 3$$

Puis, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante :

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2 + \cos(n)} \leqslant 1$$

3. **Affirmation 3 : Vrai**

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

   Donc :

$$1 \leqslant 2 + \cos(n) \leqslant 3$$

   Puis, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante :

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2 + \cos(n)} \leqslant 1$$

   Et en multipliant par n qui est positif :

3. **Affirmation 3 : Vrai**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

Donc :

$$1 \leqslant 2 + \cos(n) \leqslant 3$$

Puis, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante :

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2 + \cos(n)} \leqslant 1$$

Et en multipliant par n qui est positif :

$$\frac{n}{3} \leqslant \frac{n}{2 + \cos(n)} \leqslant n$$

3. **Affirmation 3 : Vrai**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

Donc :

$$1 \leqslant 2 + \cos(n) \leqslant 3$$

Puis, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante :

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2 + \cos(n)} \leqslant 1$$

Et en multipliant par n qui est positif :

$$\frac{n}{3} \leqslant \frac{n}{2 + \cos(n)} \leqslant n$$

Soit, en ne gardant que l'inégalité de gauche :

3. **Affirmation 3 : Vrai**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

Donc :

$$1 \leqslant 2 + \cos(n) \leqslant 3$$

Puis, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante :

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2 + \cos(n)} \leqslant 1$$

Et en multipliant par n qui est positif :

$$\frac{n}{3} \leqslant \frac{n}{2 + \cos(n)} \leqslant n$$

Soit, en ne gardant que l'inégalité de gauche :

$$v_n \geqslant \frac{n}{3}$$

3. **Affirmation 3 : Vrai**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

Donc :

$$1 \leqslant 2 + \cos(n) \leqslant 3$$

Puis, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante :

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2 + \cos(n)} \leqslant 1$$

Et en multipliant par n qui est positif :

$$\frac{n}{3} \leqslant \frac{n}{2 + \cos(n)} \leqslant n$$

Soit, en ne gardant que l'inégalité de gauche :

$$v_n \geqslant \frac{n}{3}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{3} = +\infty$

3. **Affirmation 3 : Vrai**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

Donc :

$$1 \leqslant 2 + \cos(n) \leqslant 3$$

Puis, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante :

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2 + \cos(n)} \leqslant 1$$

Et en multipliant par n qui est positif :

$$\frac{n}{3} \leqslant \frac{n}{2 + \cos(n)} \leqslant n$$

Soit, en ne gardant que l'inégalité de gauche :

$$v_n \geqslant \frac{n}{3}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{3} = +\infty$ donc, par comparaison,

3. **Affirmation 3 : Vrai**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

Donc :

$$1 \leqslant 2 + \cos(n) \leqslant 3$$

Puis, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante :

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2 + \cos(n)} \leqslant 1$$

Et en multipliant par n qui est positif :

$$\frac{n}{3} \leqslant \frac{n}{2 + \cos(n)} \leqslant n$$

Soit, en ne gardant que l'inégalité de gauche :

$$v_n \geqslant \frac{n}{3}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{3} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

4. **Affirmation 4 : Faux**

4. **Affirmation 4 : Faux**

   On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1$$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 4 + 6$$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 4 + 6 = 10$$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 4 + 6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| =$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 4 + 6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2}$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + (-2)\times 0 + 6\times 1 = 4+6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{56}$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + (-2)\times 0 + 6\times 1 = 4+6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{56}$ et
$\|\overrightarrow{AC}\| =$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + (-2)\times 0 + 6\times 1 = 4+6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{56}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2}$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 4 + 6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{56}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 4 + 6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{56}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + (-2)\times 0 + 6\times 1 = 4+6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{56}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$ donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\widehat{BAC})$$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + (-2)\times 0 + 6\times 1 = 4+6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{56}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\widehat{BAC})\\ &= \sqrt{56}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 4 + 6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{56}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})\\ &= \sqrt{56} \times \sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})\\ &= 4\sqrt{7}\cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + (-2)\times 0 + 6\times 1 = 4+6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{56}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})\\ &= \sqrt{56}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BAC})\\ &= 4\sqrt{7}\cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 4 + 6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{56}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})\\ &= \sqrt{56} \times \sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})\\ &= 4\sqrt{7}\cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$4\sqrt{7}\cos(\widehat{BAC}) = 10$$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + (-2)\times 0 + 6\times 1 = 4+6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{56}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\widehat{BAC})\\ &= \sqrt{56}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BAC})\\ &= 4\sqrt{7}\cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$4\sqrt{7}\cos(\widehat{BAC}) = 10$$

Et donc :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{10}{4\sqrt{7}}$$

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 4 + 6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{56}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= \sqrt{56} \times \sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 4\sqrt{7}\cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$4\sqrt{7}\cos(\widehat{BAC}) = 10$$

Et donc :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{10}{4\sqrt{7}}$$

On obtient alors, à l'aide de la calculatrice :

4. **Affirmation 4 : Faux**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + (-2)\times 0 + 6\times 1 = 4+6 = 10$$

De plus, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{56}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\widehat{BAC})\\ &= \sqrt{56}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BAC})\\ &= 4\sqrt{7}\cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$4\sqrt{7}\cos(\widehat{BAC}) = 10$$

Et donc :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{10}{4\sqrt{7}}$$

On obtient alors, à l'aide de la calculatrice :

$$\widehat{BAC} \approx 19°$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**

5. **Affirmation 5 : Vrai**
   Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

5. **Affirmation 5 : Vrai**
   Pour tout $x \in]0\,; +\infty[$, on a :

$$h''(x) =$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**
   Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$h''(x) = x\ln x - 3x$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**

   Pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$, on a :

$$h''(x) = x\ln x - 3x = x(\ln(x) - 3)$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$h''(x) = x\ln x - 3x = x(\ln(x) - 3)$$

Et :

$$\ln(x) - 3 \geqslant 0 \iff$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**
   Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$h''(x) = x\ln x - 3x = x(\ln(x) - 3)$$

Et :

$$\ln(x) - 3 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 3$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$h''(x) = x\ln x - 3x = x(\ln(x) - 3)$$

Et :

$$\begin{aligned} \ln(x) - 3 \geqslant 0 &\iff \ln(x) \geqslant 3 \\ &\iff x \geqslant \mathrm{e}^3 \end{aligned}$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$, on a :

$$h''(x) = x\ln x - 3x = x(\ln(x) - 3)$$

Et :

$$\begin{aligned} \ln(x) - 3 \geqslant 0 &\iff \ln(x) \geqslant 3 \\ &\iff x \geqslant \mathrm{e}^3 \end{aligned}$$

On a alors le tableau :

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$h''(x) = x\ln x - 3x = x(\ln(x) - 3)$$

Et :

$$\begin{aligned} \ln(x) - 3 \geqslant 0 &\iff \ln(x) \geqslant 3 \\ &\iff x \geqslant \mathrm{e}^3 \end{aligned}$$

On a alors le tableau :

x	0		e^3		$+\infty$
$h''(x)$	||	$-$	0	$+$	
h	||	concave		convexe	

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$, on a :

$$h''(x) = x\ln x - 3x = x(\ln(x) - 3)$$

Et :

$$\begin{aligned} \ln(x) - 3 \geqslant 0 &\iff \ln(x) \geqslant 3 \\ &\iff x \geqslant \mathrm{e}^3 \end{aligned}$$

On a alors le tableau :

x	0		e^3		$+\infty$
$h''(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
h	$\|$	concave		convexe	

La fonction h est donc convexe sur $\left[\mathrm{e}^3\,;+\infty\right[$.

Tous les sujets corrigés avec sources LaTeX :

http://specialite.mathematiques.free.fr/

Pour toute remarque :

fabien.vinsu@ac-besancon.fr