POLYNÉSIE - 2 SEPTEMBRE 2025 (SESSION DE REMPLACEMENT)

Exercice 1

Énoncé **(5 points)**

En France il y a deux formules pour obtenir le permis de conduire :

- Suivre à partir de 15 ans une formation de conduite accompagnée pendant 2 ans ;
- Suivre la formation classique (sans conduite accompagnée) à partir de 17 ans.

En France actuellement, parmi les jeunes qui suivent une formation au permis de conduire, 16 % choisissent la formation de conduite accompagnée, et parmi eux, 74,7 % réussissent l'examen de conduite dès leur première tentative.
En suivant la formation classique, le taux de réussite dès la première tentative est seulement de 56,8 %.
On choisit au hasard un jeune français qui a déjà passé l'examen de conduite et on considère les événements A et R suivants :

- A : « le jeune a suivi la formation de conduite accompagnée » ;
- R : « le jeune a eu le permis dès sa première tentative ».

On arrondira les résultats à 10^{-3} près, si nécessaire.

Partie A

1. Dresser un arbre de probabilités modélisant cette situation.
2. (a) Démontrer que $P(R) = 0{,}59664$.
   Dans la suite, on gardera la valeur $0{,}597$ arrondie à 10^{-3} près.
   (b) Donner ce résultat en pourcentage et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. On choisit un jeune ayant eu son permis dès sa première tentative. Quelle est la probabilité qu'il ait suivi la formation de conduite accompagnée ?
4. Quelle devrait être la proportion de jeunes suivant la formation de conduite accompagnée si on voulait que le taux de réussite global (quelle que soit la formation choisie) dès la première tentative à l'examen de conduite dépasse 70 % ?

Partie B

Une auto-école présente pour la première fois à l'examen de conduite 10 candidats qui ont suivi la formation de conduite accompagnée. On modélise le fait de passer les examens de conduite par des épreuves aléatoires indépendantes.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative.

1. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}747$.
2. Calculer $P(X \geqslant 6)$. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Il y a aussi 40 candidats qui n'ont pas suivi la formation de conduite accompagnée et qui se présentent pour la première fois à l'examen de conduite. De la même manière, on note Y la

variable aléatoire qui donne le nombre de ces candidats qui auront le permis à la première tentative. On admet que Y est indépendante de la variable X et qu'en fait $E(Y) = 22{,}53$ et $V(Y) = 9{,}81$.

On note alors Z la variable aléatoire comptant le nombre total de candidats (parmi les 50) qui auront le permis de conduire dès la première tentative dans cette auto-école.

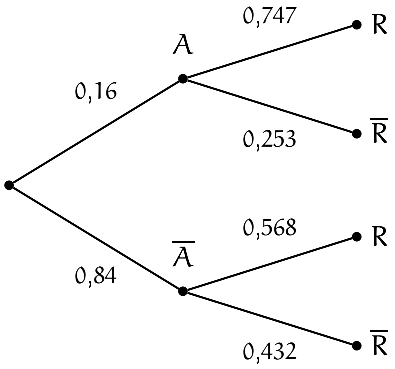
(a) Exprimer Z en fonction de X et Y. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

(b) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est inférieure à 0,12.

Correction

Partie A

1. On peut modéliser la situtation à l'aide de l'arbre suivant :



2.(a) Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A) \times P_A(R) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(R) \\ &= 0{,}16 \times 0{,}747 + 0{,}84 \times 0{,}568 \\ &= 0{,}11952 + 0{,}47712 \\ &= 0{,}59664 \end{aligned}$$

La probabilité pour que le jeune ait eu le permis dès la première tentative est donc :

$$\boxed{P(R) = 0{,}59664}$$

(b) Cela signifie que :

$$\boxed{\text{Environ 59,7 \% des jeunes réussissent le permis à la première tentative}}$$

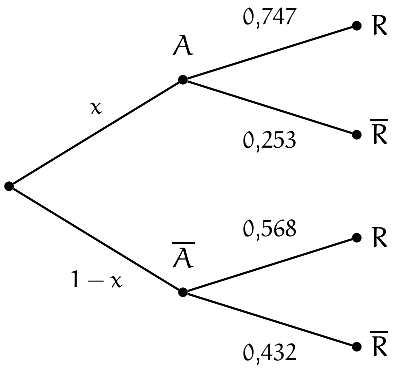
3. Il s'agit de calculer $P_R(A)$:

$$\begin{aligned} P_R(A) &= \frac{P(A \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{P(A) \times P_A(R)}{P(R)} \\ &= \frac{0{,}16 \times 0{,}747}{0{,}597} \\ &\approx 0{,}200 \end{aligned}$$

Sachant que le jeune a eu son permis dès sa première tentative, la probabilité qu'il ait suivi la formation de conduite accompagnée est :

$$\boxed{P_R(A) \approx 0{,}200}$$

4. Soit x la proportion de jeunes suivant la formation de conduite accompagnée. On peut modéliser cette nouvelle situation par l'arbre suivant :



Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A) \times P_A(R) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(R) \\ &= x \times 0{,}747 + (1 - x) \times 0{,}568 \\ &= 0{,}747x + 0{,}568 - 0{,}568x \\ &= 0{,}179x + 0{,}568 \end{aligned}$$

Il s'agit alors de déterminer les valeurs de x pour lesquelles $P(R) \geqslant 0{,}7$:

$$\begin{aligned} P(R) \geqslant 0{,}7 &\iff 0{,}179x + 0{,}568 \geqslant 0{,}7 \\ &\iff 0{,}179x \geqslant 0{,}132 \\ &\iff x \geqslant \frac{0{,}132}{0{,}179} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{0{,}132}{0{,}179} \approx 0{,}737$ donc si l'on veut que le taux de réussite global dès la première tentative à l'examen de conduite dépasse 70 %, la proportion de jeunes suivant la formation de conduite accompagnée devrait être supérieure à :

$$\boxed{73{,}7\ \%}$$

Partie B

1. On répète 10 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à 0,747. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 10 \text{ et } p = 0{,}747}$$

2. À l'aide de la calculatrice, on obtient que la probabilité pour qu'au moins 6 candidats parmi les 10 aient leur permis dès la première tentative est :

$$\boxed{P(X \geqslant 6) \approx 0{,}918}$$

3. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}727$. Son espérance est donc $E(X) = n \times p = 10 \times 0{,}747 = 7{,}47$ et sa variance est $V(X) = np(1-p) = 10 \times 0{,}747 \times 0{,}253 = 1{,}88991$. Soit :

$$\boxed{E(X) = 7{,}47} \quad \text{et} \quad \boxed{V(X) = 1{,}88991}$$

4.(a) Le nombre total de candidats qui auront le permis dès la première tentative est égal à la somme de ceux qui ont suivi la conduite accompagnée et de ceux qui ne l'on pas suivie, soit :

$$\boxed{Z = X + Y}$$

On a alors, par linéarité de l'espérance, $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 7{,}47 + 22{,}53 = 30$ et, par indépendance, $V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 1{,}88991 + 9{,}81 = 11{,}69991$. Soit :

$$\boxed{E(Z) = 30} \quad \text{et} \quad \boxed{V(Z) = 11{,}69991}$$

(b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant 10\right) \leqslant \frac{V(Z)}{10^2}$$

D'où :

$$P\left(|Z - 30| \geqslant 10\right) \leqslant \frac{11{,}69991}{100}$$

Soit :

$$P\left((Z \leqslant 20) \text{ ou } (Z \geqslant 40)\right) \leqslant 0{,}1169991$$

Donc la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est :

$$\boxed{P\left((Z \leqslant 19{,}6) \text{ ou } (Z \geqslant 40)\right) \leqslant 0{,}12}$$

Exercice 2

Énoncé **(5 points)**

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle.
Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps.
Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0\,; +\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000.
Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.

Partie A - Modèle 1
Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle :

$$y' = 0{,}05y - 0{,}5 \quad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.
2. Comparer les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Partie B - Modèle 2
Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait

l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0{,}05y(1 - 0{,}00125y) \quad (E_2)$$

On note f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0{,}05x}}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.
Pour toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser ces résultats sans les démontrer, sauf pour la question 5.

	Instruction	Résultat
1	$f(x) := \dfrac{800}{1 + 15e^{-0{,}05x}}$	$f(x) = \dfrac{800}{1 + 15e^{-0{,}05x}}$
2	$f'(x) := \text{Dérivée}(f(x))$	$f'(x) = \dfrac{600e^{-0{,}05x}}{(1 + 15e^{-0{,}05x})^2}$
3	$f''(x) := \text{Dérivée}(f'(x))$	$f''(x) = \dfrac{30e^{-0{,}05x}}{(1 + 15e^{-0{,}05x})^3}(15e^{-0{,}05x} - 1)$
4	$\text{Résoudre}(15e^{-0{,}05x} - 1 \geqslant 0)$	$x \leqslant 20\ln(15)$

1. Démontrer que la fonction f vérifie $f(0) = 50$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 0{,}05f(x)(1 - 0{,}00125f(x))$$

   On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.
2. Avec ce nouveau modèle f, estimer l'effectif de cette population en 2050.
   Arrondir le résultat à l'unité.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe $\mathscr{C}$?
   Interpréter cette limite dans le cadre de ce problème concret.
4. Justifier que la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
5. Démontrer le résultat obtenu en ligne 4 du logiciel.
6. On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f'.
   (a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.
   (b) La direction de la réserve affirme :
   « Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ».
   La direction a-t-elle raison ? Justifier.

Correction
Partie A

1. Il s'agit d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 0{,}05$ et $b = -0{,}5$. On a alors $\dfrac{b}{a} = \dfrac{-0{,}5}{0{,}05} = -10$. Les solutions de (E_1) sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{0{,}05x} + 10$$

De plus, on sait que $y(0) = 50$:

$$\begin{aligned} y(0) = 50 &\iff \lambda e^{0{,}05\times 0} + 10 = 50 \\ &\iff \lambda + 10 = 50 \\ &\iff \lambda = 40 \end{aligned}$$

La solution y de (E_1) vérifiant $y(0) = 50$ est donc le fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\boxed{y(x) = 40e^{0{,}05x} + 10}$$

2. On a alors :
   - $y(0) = 50$ ce qui correspond au nombre d'individus en 2000.
   - $y(5) = 40e^{0{,}05\times 5} + 10 \approx 61$ alors que le nombre réel en 2005 est de 64.
   - $y(10) = 40e^{0{,}05\times 10} + 10 \approx 76$ alors que le nombre réel en 2010 est de 80.
   - $y(15) = 40e^{0{,}05\times 15} + 10 \approx 95$ alors que le nombre réel en 2015 est de 100.

   On peut considérer que la modélisation est correcte mais qu'elle manque tout de même de précision.

Partie B

1. On a $f(0) = \dfrac{800}{1 + 15e^{0}} = \dfrac{800}{16} = 50$, soit :

$$\boxed{f(0) = 50}$$

D'après le logiciel de calcul formel, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{600e^{-0{,}05x}}{(1 + 15e^{-0{,}05x})^2}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} 0{,}05f(x)(1 - 0{,}00125f(x)) &= 0{,}05 \times \frac{800}{1 + 15e^{-0{,}05x}}\left(1 - 0{,}00125 \times \frac{800}{1 + 15e^{-0{,}05x}}\right) \\ &= \frac{40}{1 + 15e^{-0{,}05x}}\left(1 - \frac{1}{1 + 15e^{-0{,}05x}}\right) \\ &= \frac{40}{1 + 15e^{-0{,}05x}} \times \frac{1 + 15e^{-0{,}05x} - 1}{1 + 15e^{-0{,}05x}} \\ &= \frac{40}{1 + 15e^{-0{,}05x}} \times \frac{15e^{-0{,}05x}}{1 + 15e^{-0{,}05x}} \\ &= \frac{600e^{-0{,}05x}}{(1 + 15e^{-0{,}05x})^2} \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{f'(x) = 0{,}05f(x)(1 - 0{,}00125f(x))}$$

2. On a $f(50) = \dfrac{800}{1+15e^{50}} \approx 359$ donc avec ce modèle, on peut estimer qu'en 2050 le nombre d'individus sera :

$$\boxed{f(50) \approx 359}$$

3. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0{,}05x} = 0$ donc :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 800}$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 800$ pour asymptote horizontale en $+\infty$. Cela signifie qu'à long terme, le nombre d'individu va se rapprocher de 800.

4. Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{600e^{-0{,}05x}}{(1+15e^{-0{,}05x})^2}$. Or pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $600e^{-0{,}05x} > 0$ et $\left(1+15e^{-0{,}05x}\right)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$. On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
15e^{-0{,}05x} - 1 \geqslant 0 &\iff 15e^{-0{,}05x} \geqslant 1 \\
&\iff e^{-0{,}05x} \geqslant \frac{1}{15} \\
&\iff -0{,}05x \geqslant \ln\left(\frac{1}{15}\right) \\
&\iff -0{,}05x \geqslant -\ln(15) \\
&\iff x \leqslant \frac{-\ln(15)}{-0{,}05} \\
&\iff x \leqslant 20\ln(15)
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{15e^{-0{,}05x} - 1 \geqslant 0 \iff x \leqslant 20\ln(15)}$$

6. (a) D'après le logiciel de calcul formel, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f''(x) = \frac{30e^{-0{,}05x}}{(1+15e^{-0{,}05x})^3}(15e^{-0{,}05x} - 1)$$

On en déduit le tableau :

x	0		$20\ln(15)$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f		convexe		concave	

La fonction f'' s'annule en changeant de signe en $x = 20\ln(15)$ donc la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion en cette valeur. De plus :

$$f(20\ln(15)) = \frac{800}{1+15e^{-0{,}05\times 20\ln(15)}} = \frac{800}{1+15e^{-\ln(15)}} = \frac{800}{2} = 400$$

Le point d'inflexion est donc le point de coordonnées :

$$\boxed{(20\ln(15)\,;400)}$$

(b) La fonction f' est croissante jusqu'à $20\ln(15)$ puis décroissante. Or $20\ln(15) \approx 54$ donc la direction a raison.

Exercice 3

Énoncé **(5 points)**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2 + \ln\left(u_n^2 - 3\right)$$

On admet que cette suite est bien définie.

Partie A : Exploitation de programmes Python

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour que `suite(k)` qui prend en paramètre un entier naturel k, renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n).
   Remarque : On précise que, pour tout réel strictement positif a, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de a.

```python
def suite(k) :
  L = []
  u = 5
  for i in range(...) :
    L.append(u)
    u = ...
  return(...)
```

2. On a exécuté `suite(9)` ci-dessous. Émettre deux conjectures : l'une sur le sens de variation de la suite (u_n) et l'autre sur son éventuelle convergence.

```
>>> suite(9)
[5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,
5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,
5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642]
```

3. On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(1000)` ce qui a renvoyé `1`.
   Cet affichage contredit-il la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.

```python
def mystere(n) :
  L = suite(n)
  c = 1
  for i in range(n - 1) :
    if L[i] > L[i + 1] :
      c = 0
  return c
```

```
>>> mystere(1000)
1
```

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + \ln(x^2 - 3)$$

On admet que g est dérivable sur $[2\,;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction g est croissante sur $[2\,;+\infty[$.

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$$

   (b) En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie C : Étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2 + \ln(x^2 - 3) - x$$

On admet que f est dérivable sur $[2\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On donne le tableau de variations de f suivant. On ne demande aucune justification.

x	2	3	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$\ln(6) - 1$	$\searrow$ $-\infty$

1. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[2\,;+\infty[$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.

   (b) Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée à 10^{-3} près de β.

2. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   Justifier que $f(\ell) = 0$ et déterminer ℓ.

Correction

Partie A

1. On peut compléter le script de la façon suivante :

```
def suite(k) :
  L = []
  u = 5
  for i in range(k) :
    L.append(u)
    u = 2 + log(u**2-3)
  return(L)
```

2. On peut conjecturer que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante et converge vers } l \approx 5{,}164}$$

3. Cet affichage ne contredit pas la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (u_n) car cela signifie que, pour tout entier n compris entre 0 et 998, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

Partie B

1. Pour tout $x \in [2\,;\,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2-3}$$

Or, pour tout $x \in [2\,;\,+\infty[$, $2x > 0$ et $x^2 - 3 > 0$ donc $g'(x) > 0$. On en déduit que :

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [2\,;\,+\infty[}$$

2.(a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

- **Initialisation :**
Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 2 + \ln(22) \approx 5{,}1$. On a donc $4 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité :**
Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$. On a alors, en appliquant la fonction g qui est croissante sur l'intervalle $[4\,;\,6]$:

$$g(4) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(6)$$

Soit :

$$2 + \ln(13) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2 + \ln(33)$$

Or $2 + \ln(13) \approx 4{,}6$ et $2 + \ln(33) \approx 5{,}5$. On a donc, a fortiori :

$$4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) La suite (u_n) est :

- croissante (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$).
- majorée (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 6$).

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$

Partie C

1.(a)
- On a $f(0) = 0$.
- Sur l'intervalle $[2\,;\,3]$, la fonction f est strictement croissante et $f(0) = 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $]2\,;\,3]$.
- Sur l'intervalle $[3\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus $f(3) = \ln(6) - 1 \approx 0{,}8$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Or $0 \in]-\infty\,;\,\ln(6) - 1]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β sur $[3\,;\,+\infty[$.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[2\,;\,+\infty[$.

(b) On a vu que :

$$\boxed{\alpha = 0}$$

Et on a :

- $f(5{,}164) \approx 0{,}00008 > 0$
- $f(5{,}165) \approx -0{,}0005 < 0$

On a donc :

$$\boxed{\beta \approx 5{,}164}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = g(u_n)$. Et comme la suite (u_n) converge, on sait que sa limite ℓ vérifie $g(\ell) = \ell$. Or $f(x) = g(x) - x$ donc :

$$g(\ell) = \ell \iff f(\ell) = 0$$

Or l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions : 0 et β. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leqslant u_n \leqslant 6$ donc la suite (u_n) ne peut pas converger vers 0 d'où :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \beta}$$

Exercice 4

Énoncé **(5 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.
   Affirmation 1 :
$$\int_1^e f(x)\,dx = \frac{e^2+1}{4}$$
2. Soient n et k deux entiers naturels non nuls tels que $k \leqslant n$.
   Affirmation 2 :
$$n \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \binom{n}{k}$$
3. Pour les trois affirmations suivantes, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
   Soit d la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = -t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
   Soit d'' la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2t'-1 \\ y = -t'+2 \\ z = t'+1 \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$.
   Soit P le plan d'équation cartésienne : $2x + y - 2z + 18 = 0$.
   Soit A le point de coordonnées $(-1\,; -3\,; 2)$ et B le point de coordonnées $(-5\,; -5\,; 6)$. On appelle plan médiateur du segment $[AB]$ le plan passant par le milieu du segment $[AB]$ et orthogonal à la droite (AB).

   Affirmation 3 : Le point A appartient à la droite d.

   Affirmation 4 : Les droites d et d' sont sécantes.

   Affirmation 5 : Le plan P est le plan médiateur du segment $[AB]$.

Correction

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

   On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^e x\ln(x)\,dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}e^2\ln(e) - \frac{1}{2}1^2\ln(1) - \int_1^e \frac{1}{2}x\,dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   Soit :

$$\int_1^e f(x)\,dx = \frac{e^2+1}{4}$$

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   On a :

$$\begin{aligned} k \times \binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1)!} \\ &= n \times \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

   On a donc bien l'égalité :

$$n \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \binom{n}{k}$$

3. **Affirmation 3 : Vrai**
   Le point A est le point de paramètre $t = -2$ dans la représentation paramétrique de la droite d.

Affirmation 4 : Faux

Soit t et t' deux réels, on a :

$$\begin{cases} t+1 = 2t'-1 \\ 2t+1 = -t'+2 \\ -t = t'+1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2t'-2 \\ 2(2t'-2)+1 = -t'+2 \\ -(2t'-2) = t'+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 2t'-2 \\ 4t'-4+1 = -t'+2 \\ -2t'+2 = t'+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 2t'-2 \\ 5t' = 5 \\ -3t' = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 2t'-2 \\ t' = 1 \\ t' = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Ce système n'admet aucune solution donc les droites d et d' ne sont pas sécantes.

Affirmation 5 : Vrai

- Soit I le milieu de $[AB]$, on a $I\left(\dfrac{-1-5}{2}\,;\,\dfrac{-3-5}{2}\,;\,\dfrac{2+6}{2}\right)$, soit $I\,(-3\,;\,-4\,;\,4)$. On a alors $2\times(-3)+(-4)-2\times 4+18=0$, les coordonnées du point I vérifie l'équation de plan P donc I appartient à ce plan.
- On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et, d'après son équation cartésienne, le plan P admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. On peut remarquer que $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{n}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{n}$ étant colinéaires, le plan P est orthogonal à la droite (AB).

Le plan P passe donc par le milieu de $[AB]$ et est orthogonal à la droite (AB), c'est donc le plan médiateur du segment $[AB]$.