Corrigé de l'épreuve du baccalauréat de spécialité mathématiques

Asie

5 septembre 2025 (remplacement)

Exercice 4

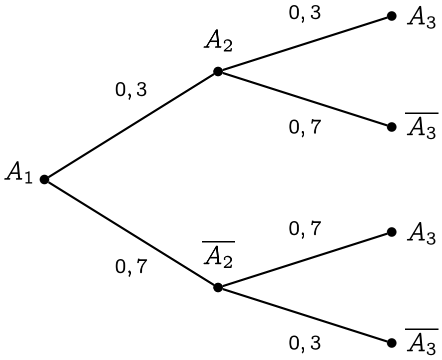
http://specialite.mathematiques.free.fr/

fabien.vinsu@ac-besancon.fr

Exercice 4 - Partie A

1. On complète l'arbre de la façon suivante :

1. On complète l'arbre de la façon suivante :



2. Les événements A_2 et $\overline{A_2}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

2. Les événements A_2 et $\overline{A_2}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_3) =$$

2. Les événements A_2 et $\overline{A_2}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_3) = P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P(\overline{A_2}) \times P_{\overline{A_2}}(A_3)$$

2. Les événements A_2 et $\overline{A_2}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P(\overline{A_2}) \times P_{\overline{A_2}}(A_3) \\ &= 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,7 \end{aligned}$$

2. Les événements A_2 et $\overline{A_2}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P(\overline{A_2}) \times P_{\overline{A_2}}(A_3) \\ &= 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,7 \\ &= 0,09 + 0,49 \end{aligned}$$

2. Les événements A_2 et $\overline{A_2}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P(\overline{A_2}) \times P_{\overline{A_2}}(A_3) \\ &= 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,7 \\ &= 0,09 + 0,49 \\ &= 0,58 \end{aligned}$$

2. Les événements A_2 et $\overline{A_2}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P(\overline{A_2}) \times P_{\overline{A_2}}(A_3) \\ &= 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,7 \\ &= 0,09 + 0,49 \\ &= 0,58 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{p_3 = 0,58}$$

3. On a :

$$P_{A_3}(A_2) =$$

3. On a :

$$P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} P_{A_3}(A_2) &= \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} \\ &= \frac{0,3 \times 0,3}{0,58} \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} P_{A_3}(A_2) &= \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} \\ &= \frac{0,3 \times 0,3}{0,58} \\ &= 0,16 \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} P_{A_3}(A_2) &= \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} \\ &= \frac{0,3 \times 0,3}{0,58} \\ &= 0,16 \end{aligned}$$

La probabilité conditionnelle de A_2 sachant A_3 est donc :

3. On a :

$$\begin{aligned} P_{A_3}(A_2) &= \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} \\ &= \frac{0,3 \times 0,3}{0,58} \\ &= 0,16 \end{aligned}$$

La probabilité conditionnelle de A_2 sachant A_3 est donc :

$$\boxed{P_{A_3}(A_2) \approx 0,16}$$

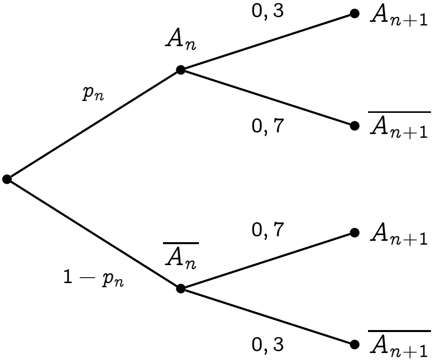
Partie B

Partie B

1. On complète l'arbre de la façon suivante :

Partie B

1. On complète l'arbre de la façon suivante :



2. (a) Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

2. (a) Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) =$$

2. (a) Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$

2. (a) Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,3 + (1 - p_n) \times 0,7 \end{aligned}$$

2. (a) Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,3 + (1 - p_n) \times 0,7 \\ &= 0,3p_n + 0,7 - 0,7p_n \end{aligned}$$

2. (a) Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,3 + (1 - p_n) \times 0,7 \\ &= 0,3p_n + 0,7 - 0,7p_n \\ &= -0,4p_n + 0,7 \end{aligned}$$

2. (a) Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,3 + (1 - p_n) \times 0,7 \\ &= 0,3p_n + 0,7 - 0,7p_n \\ &= -0,4p_n + 0,7 \end{aligned}$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

2. (a) Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,3 + (1 - p_n) \times 0,7 \\ &= 0,3p_n + 0,7 - 0,7p_n \\ &= -0,4p_n + 0,7 \end{aligned}$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{p_{n+1} = -0,4p_n + 0,7}$$

2. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

2. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1} =$$

2. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,5$$

2. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,5 \\ &= -0,4p_n + 0,7 - 0,5 \end{aligned}$$

2. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,5 \\ &= -0,4p_n + 0,7 - 0,5 \\ &= -0,4p_n + 0,2 \end{aligned}$$

2. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,5 \\ &= -0,4p_n + 0,7 - 0,5 \\ &= -0,4p_n + 0,2 \\ &= -0,4(p_n - 0,5) \end{aligned}$$

2. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,5 \\ &= -0,4p_n + 0,7 - 0,5 \\ &= -0,4p_n + 0,2 \\ &= -0,4(p_n - 0,5) \\ &= -0,4u_n \end{aligned}$$

2. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,5 \\ &= -0,4p_n + 0,7 - 0,5 \\ &= -0,4p_n + 0,2 \\ &= -0,4(p_n - 0,5) \\ &= -0,4u_n \end{aligned}$$

Et comme $u_1 = p_1 - 0,5 = 1 - 0,5 = 0,5$ donc :

2. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,5 \\ &= -0,4p_n + 0,7 - 0,5 \\ &= -0,4p_n + 0,2 \\ &= -0,4(p_n - 0,5) \\ &= -0,4u_n \end{aligned}$$

Et comme $u_1 = p_1 - 0,5 = 1 - 0,5 = 0,5$ donc :

$\boxed{(u_n) \text{ est une suite géométrique de premier terme } u_1 = 0,5 \text{ et de raison } -0,4}$

2. (c) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

2. (c) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times (-0,4)^{n-1}$,

2. (c) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times (-0,4)^{n-1}$, soit :

$$\boxed{u_n = 0,5 \times (-0,4)^{n-1}}$$

2. (c) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times (-0,4)^{n-1}$, soit :

$$\boxed{u_n = 0,5 \times (-0,4)^{n-1}}$$

Et comme $u_n = p_n - 0,5$,

2. (c) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times (-0,4)^{n-1}$, soit :

$$\boxed{u_n = 0,5 \times (-0,4)^{n-1}}$$

Et comme $u_n = p_n - 0,5$, on a $p_n = 0,5 + u_n$

2. (c) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times (-0,4)^{n-1}$, soit :

$$\boxed{u_n = 0,5 \times (-0,4)^{n-1}}$$

Et comme $u_n = p_n - 0,5$, on a $p_n = 0,5 + u_n$ soit :

$$\boxed{p_n = 0,5 + 0,5 \times (-0,4)^{n-1}}$$

2. (d) On a $-1 < -0,4 < 1$

2. (d) On a $-1 < -0,4 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,4)^{n-1} = 0$

2. (d) On a $-1 < -0,4 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,4)^{n-1} = 0$ et donc :

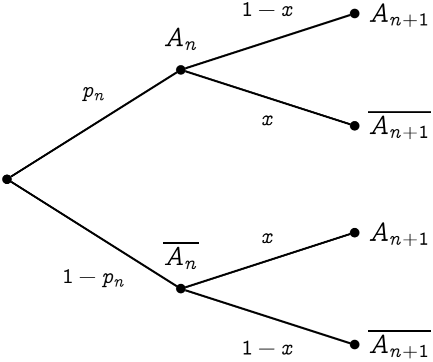
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,5}$$

Partie C

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :

Partie C

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) =$$

Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$

Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times (1 - x) + (1 - p_n) \times x \end{aligned}$$

Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times (1 - x) + (1 - p_n) \times x \\ &= p_n - xp_n + x - xp_n\end{aligned}$$

Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times (1 - x) + (1 - p_n) \times x \\ &= p_n - xp_n + x - xp_n \\ &= (1 - 2x)p_n + 1 \end{aligned}$$

Les événements A_n et $\overline{A_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\
&= p_n \times (1 - x) + (1 - p_n) \times x \\
&= p_n - xp_n + x - xp_n \\
&= (1 - 2x)p_n + 1
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{p_{n+1} = (1 - 2x)p_n + x}$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$.

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$.
   - **Initialisation :**

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part
  $\dfrac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \dfrac{1}{2} =$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part
  $\frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part
  $\dfrac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part $\frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. On a donc $p_1 = \frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2}$,

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part
  $\dfrac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$. On a donc $p_1 = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \dfrac{1}{2}$,
  la propriété est vraie pour $n = 1$.

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part $\frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. On a donc $p_1 = \frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2}$, la propriété est vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité :**

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part
  $\dfrac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$. On a donc $p_1 = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \dfrac{1}{2}$,
  la propriété est vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$,

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part $\frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. On a donc $p_1 = \frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2}$, la propriété est vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$.

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part
  $\dfrac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$. On a donc $p_1 = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \dfrac{1}{2}$,
  la propriété est vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$,
  c'est-à-dire $p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$. On a alors :

  $p_{n+1} =$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part $\dfrac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$. On a donc $p_1 = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \dfrac{1}{2}$, la propriété est vraie pour $n = 1$.

- **Hérédité :**
Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$. On a alors :

$$p_{n+1} = (1-2x)p_n + x$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part $\frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. On a donc $p_1 = \frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2}$, la propriété est vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1-2x)p_n + x \\ &= (1-2x)\left(\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}\right) + x \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part $\frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. On a donc $p_1 = \frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2}$, la propriété est vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= (1-2x)p_n + x \\
&= (1-2x)\left(\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}\right) + x \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2}(1-2x) + x
\end{aligned}$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part
  $\dfrac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$. On a donc $p_1 = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \dfrac{1}{2}$,
  la propriété est vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$,
  c'est-à-dire $p_n = \dfrac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= (1-2x)p_n + x \\
&= (1-2x)\left(\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}\right) + x \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2}(1-2x) + x \\
&= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} - x + x
\end{aligned}$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part
$\frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. On a donc $p_1 = \frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2}$,
la propriété est vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité :**
Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$,
c'est-à-dire $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= (1-2x)p_n + x \\
&= (1-2x)\left(\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}\right) + x \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2}(1-2x) + x \\
&= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} - x + x \\
&= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$ on a d'une part $p_1 = 1$ et d'autre part $\frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. On a donc $p_1 = \frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2}$, la propriété est vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= (1-2x)p_n + x \\
&= (1-2x)\left(\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}\right) + x \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2}(1-2x) + x \\
&= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} - x + x \\
&= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion :**

- **Conclusion :**
  La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $x \in]0\,;1[$, on a alors :

3. Soit $x \in]0\,;1[$, on a alors :

$$0 < 2x < 2$$

3. Soit $x \in]0\,;1[$, on a alors :

$$0 < 2x < 2$$

Puis :

$$-2 < -2x < 0$$

3. Soit $x \in]0\,;1[$, on a alors :

$$0 < 2x < 2$$

Puis :

$$-2 < -2x < 0$$

Et donc :

$$-1 < -1 - 2x < 1$$

3. Soit $x \in]0\,;1[$, on a alors :

$$0 < 2x < 2$$

Puis :

$$-2 < -2x < 0$$

Et donc :

$$-1 < -1 - 2x < 1$$

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} (1 - 2x)^{n-1} = 0$

3. Soit $x \in]0\,;1[$, on a alors :

$$0 < 2x < 2$$

Puis :

$$-2 < -2x < 0$$

Et donc :

$$-1 < -1 - 2x < 1$$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-2x)^{n-1} = 0$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,5}$$