MÉTROPOLE - 9 SEPTEMBRE 2025 (REMPLACEMENT)

Exercice 1

Énoncé **(5 points)**

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ y' + 0{,}4y = e^{-0{,}4t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t.

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = te^{-0{,}4t}$.
   Vérifier que u est solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f(t) - u(t)$.
   Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0{,}4y = 0$.
   (a) Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

   On admettra que la réciproque est vraie.

   (b) Résoudre l'équation différentielle (H).
   (c) En déduire les solutions de (E).
   (d) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B

On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas.

La glycémie en $g.L^{-1}$, en fonction du temps t, exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,6]$ par :

$$f(t) = (t+1)e^{-0{,}4t}$$

1.(a) Montrer que, pour tout $t \in [0\,;\,6]$, $f'(t) = (-0{,}4t + 0{,}6)e^{-0{,}4t}$.
   (b) Étudier les variations de f sur $[0\,;\,6]$ puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.
2. Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à $0{,}7$ $g.L^{-1}$.
   (a) Démontrer que sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ l'équation $f(t) = 0{,}7$ admet une unique solution que l'on notera α.
   (b) Au bout de combien de temps après avoir pris son repas cette personne est-elle en hypoglycémie ?
   On exprimera ce temps à la minute près.
3. On souhaite déterminer la glycémie moyenne en $g.L^{-1}$ chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^6 f(t)\,dt = -23{,}75e^{-2,4} + 8{,}75$$

(b) Calculer la glycémie moyenne en g.L^{-1} chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

(c) En remarquant que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E), expliquer comment on aurait pu obtenir ce résultat autrement.

Correction

Partie A

1. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= 1 \times e^{-0,4t} + t \times (-0{,}4e^{-0,4t}) \\ &= e^{-0,4t} - 0{,}4te^{-0,4t} \\ &= (1 - 0{,}4t)e^{-0,4t} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} u'(t) + 0{,}4u(t) &= (1 - 0{,}4t)e^{-0,4t} + 0{,}4te^{-0,4t} \\ &= (1 - 0{,}4t + 0{,}4t)e^{-0,4t} \\ &= e^{-0,4t} \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\boxed{u \text{ est solution de } (E)}$$

2.(a) Supposons que g est solution de (H), c'est-à-dire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g'(t) + 0{,}4g(t) = 0$$

D'autre part, on a vu que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$u'(t) + 0{,}4u(t) = e^{-0,4t}$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$$g'(t) + u'(t) + 0{,}4g(t) + 0{,}4u(t) = e^{-0,4t}$$

Soit :

$$(g+u)'(t) + 0{,}4(g+u)(t) = e^{-0,4t}$$

Et comme $g(t) = f(t) - u(t)$, on a $f(t) = g(t) + u(t)$ donc l'égalité précédente donne :

$$f'(t) + 0{,}4f(t) = e^{-0,4t}$$

C'est-à-dire que :

$$\boxed{f \text{ est solution de } (E)}$$

(b) L'équation différentielle (H) s'écrit $y' = -0{,}4y$, elle admet donc pour solutions les fonctions de la forme :

$$\boxed{t \mapsto \lambda e^{-0,4t} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

(c) D'après la question 2a, les solutions de (E) sont les fonctions qui s'écrivent comme la somme de la fonction u et d'une solutions de (H), c'est-à-dire les fonctions de la forme :

$$t \mapsto te^{-0,4t} + \lambda e^{-0,4t} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Soit :

$$\boxed{t \mapsto (t+\lambda)e^{-0,4t} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

(d) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = (t+\lambda)e^{-0,4t}$ d'où $f(0) = (0+\lambda)e^0 = \lambda$. On a alors :

$$f(0) = 1 \iff \lambda = 1$$

On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(t) = (t+1)e^{-0,4t}}$$

Partie B

1.(a) La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,6]$ et, pour tout $t \in [0\,;\,6]$, on a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 \times e^{-0,4t} + (t+1) \times (-0,4e^{-0,4t}) \\ &= e^{-0,4t} - 0,4te^{-0,4t} - 0,4e^{-0,4t} \\ &= 0,6e^{-0,4t} - 0,4te^{-0,4t} \\ &= (-0,4t+0,6)e^{-0,4t} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(t) = (-0,4t+0,6)e^{-0,4t}}$$

(b) Pour tout $t \in [0\,;\,6]$, $e^{-0,4t} > 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $-0,4t+0,6$. Or on a :

$$\begin{aligned} -0,4t+0,6 = 0 &\iff -0,4t = -0,6 \\ &\iff t = \frac{-0,6}{-0,4} \\ &\iff t = 1,5 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau :

t	0		$1,5$		6
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$2,5e^{-0,6}$	$\searrow$	$7e^{-2,4}$

2.(a)
- On a $f(0) = 1$ et la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1,5]$. On en déduit que, pour tout $t \in [0\,;\,1,5]$, $f(x) \geqslant 1$. Donc l'équation $f(t) = 0,7$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $[0\,;\,1,5]$.
- Sur l'intervalle $[1,5\,;\,6]$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus $f(1,5) = 2,5e^{-0,6} \approx 1,37 > 0,7$ et $f(6) = 7e^{-2,4} \approx 0,64 < 0,7$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 0,7$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1,5\,;\,6]$.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'équation } f(t) = 0,7 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur l'intervalle } [0\,;\,6]}$$

(b) On a :

- $f(5{,}61) \approx 0{,}7009 > 0{,}7$
- $f(5{,}62) \approx 0{,}6991 < 0{,}7$

On en déduit :

$$\boxed{5{,}61 < \alpha < 5{,}62}$$

La personne est donc en hypoglycémie au bout d'environ 5,62 heures, soit environ :

$$\boxed{\text{5 heures et 37 minutes}}$$

3.(a) Pour tout $t \in [0\,;6]$, on pose :

$$\begin{cases} u(t) = t+1 \\ v'(t) = e^{-0{,}4t} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\dfrac{1}{0{,}4}e^{-0{,}4t} = -\dfrac{5}{2}e^{-0{,}4t} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^6 (t+1)e^{-0{,}4t}\,dt &= \left[-\frac{5}{2}(t+1)e^{-0{,}4t}\right]_0^6 - \int_0^6 -\frac{5}{2}e^{-0{,}4t}\,dt \\ &= -\frac{5}{2}\times 7e^{-2{,}4} + \frac{5}{2}e^0 + \int_0^6 \frac{5}{2}e^{-0{,}4t}\,dt \\ &= -\frac{35}{2}e^{-2{,}4} + \frac{5}{2} + \left[\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{0{,}4}\right)e^{-0{,}4t}\right]_0^6 \\ &= -\frac{35}{2}e^{-2{,}4} + \frac{5}{2} + \left[-\frac{25}{4}e^{-0{,}4t}\right]_0^6 \\ &= -\frac{35}{2}e^{-2{,}4} + \frac{5}{2} - \frac{25}{4}e^{-2{,}4} + \frac{25}{4} \\ &= -\frac{95}{4}e^{-2{,}4} + \frac{35}{4} \\ &= -23{,}75e^{-2{,}4} + 8{,}75 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^6 f(t)\,dt = -23{,}75e^{-2{,}4} + 8{,}75}$$

(b) Il s'agit de calculer la valeur moyenne m de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;6]$:

$$m = \frac{1}{6}\int_0^6 (t+1)e^{-0{,}4t}\,dt = \frac{-23{,}75e^{-2{,}4} + 8{,}75}{6} \approx 1{,}099$$

La glycémie moyenne en chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas est d'environ :

$$\boxed{1{,}099 \text{ g.L}^{-1}}$$

(c) La fonction f étant solution de (E), on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) + 0{,}4f(t) = e^{-0{,}4t}$$

En intégrant cette égalité sur l'intervalle $[0\,;6]$, on obtient :

$$\int_0^6 f'(t)\,dt + 0{,}4\int_0^6 f(t)\,dt = \int_0^6 e^{-0{,}4t}\,dt$$

Or :

$$\int_0^6 f'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\Big]_0^6 = f(6) - f(0) = 7e^{-2,4} - 1$$

Et :

$$\int_0^6 e^{-0,4t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{5}{2}e^{-0,4t}\right]_0^6 = -\frac{5}{2}e^{-2,4} + \frac{5}{2}$$

D'où :

$$\begin{aligned} 0,4\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t &= -\frac{5}{2}e^{-2,4} + \frac{5}{2} - \left(7e^{-2,4} - 1\right) \\ &= -\frac{19}{2}e^{-2,4} + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{5}{2}\left(-\frac{19}{2}e^{-2,4} + \frac{7}{2}\right) \\ &= -\frac{95}{4}e^{-2,4} + \frac{35}{4} \\ &= -23,75e^{-2,4} + 8,75 \end{aligned}$$

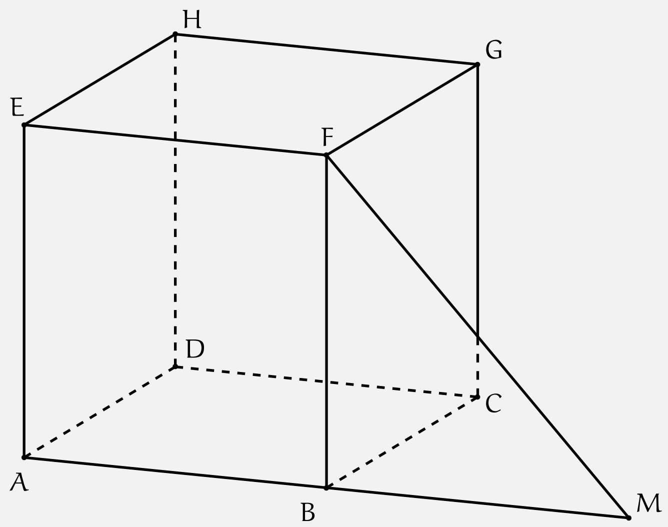
On retrouve donc bien :

$$\boxed{\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = -23,75e^{-2,4} + 8,75}$$

Exercice 2

Énoncé **(5 points)**

On considère le cube ABCDEFGH.
On place le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$.



Partie A

1. Montrer que les droites (FG) et (FM) sont perpendiculaires.
2. Montrer que les points A, M, G et H sont coplanaires.

Partie B

On se place dans le repère orthonormé $(A\,; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AH}$ et montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.
2. (a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (GM) est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

   (b) On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (AH) est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = k \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

   Montrer que le point d'intersection de (GM) et (AH), que l'on nommera N, a pour coordonnées $(0\,;2\,;2)$.
3. (a) Montrer que le triangle AMN est un triangle rectangle en A.
   (b) Calculer l'aire de ce triangle.
4. Soit J le centre de la face $BCGF$.
   (a) Déterminer les coordonnées du point J.
   (b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{FJ}$ est un vecteur normal au plan (AMN).
   (c) Montrer que J appartient au plan (AMN). En déduire qu'il est le projeté orthogonal du point F sur le plan (AMN).
5. On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ d'un tétraèdre ou d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$$

   $\mathscr{B}$ étant l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
   Montrer que le volume du tétraèdre $AMNF$ est le double du volume de la pyramide $BCGFM$.

Correction
Partie A

1. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FM} &= \overrightarrow{FG}.(\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BM}) \qquad \textit{(relation de Chasles)} \\ &= \overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG}.\overrightarrow{AB} \qquad \textit{(car B est le milieu de [AM])} \end{aligned}$$

   Or ABCDEFGH étant un cube, on a $\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FB} = 0$ et $\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{AB} = 0$ d'où $\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FM} = 0$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Les droites (FG) et (FM) sont perpendiculaires}}$$

2. ABCD étant un cube, les droites (AB) et (HG) sont parallèles, elles sont donc coplanaires. Les points A, M, G et H appartenant à ces droites, on en déduit que :

$$\boxed{\text{Les points A, M, G et H sont coplanaires}}$$

Partie B

1. On a $G(1;1;1)$, $M(2;0;0)$, $A(0;0;0)$ et $H(0;1;1)$ et donc $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. On remarque qu'il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{GM}$ donc :

$$\boxed{\text{Les vecteurs } \overrightarrow{GM} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ne sont pas colinéaires}}$$

2.(a) La droite (GM) passe par le point $G(1;1;1)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur, elle a donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 1-t \end{cases}}$$

(b) Il s'agit de résoudre le système formé à partir des deux représentations paramétriques :

$$\begin{cases} 1+t=0 \\ 1-t=k \\ 1-t=k \end{cases} \iff \begin{cases} t=-1 \\ k=1-t \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} t=-1 \\ k=2 \end{cases}$$

Les droites (GM) et (AH) dont donc sécantes au point de paramètre $t=-1$ dans la représentation paramétrique de (GM) et $k=2$ dans celle de (AH), soit le point :

$$\boxed{N(0;2;2)}$$

3.(a) On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$, d'où :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 2\times 0 + 0\times 2 + 0\times 2 = 0$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux et donc que :

$$\boxed{\text{Le triangle AMN est rectangle en A}}$$

(b) On a $AM = 2$ et $AN = \sqrt{0^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ et le triangle AMN étant rectangle en A, son aire est :

$$\mathscr{A}_{AMN} = \frac{AM\times AN}{2} = \frac{2\times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{A}_{AMN} = 2\sqrt{2}}$$

4.(a) Le point J est le milieu du segment [BG], on a donc :

$$\boxed{\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$$

(b) On a $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ d'où :

- $\overrightarrow{FJ}.\overrightarrow{AM} = 0 \times 2 + 0{,}5 \times 0 - 0{,}5 \times 0 = 0$
- $\overrightarrow{FJ}.\overrightarrow{AN} = 0 \times 0 + 0{,}5 \times 2 - 0{,}5 \times 2 = 1 - 1 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{FJ}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AMN), on en déduit que :

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{FJ} \text{ est un vecteur normal au plan (AMN)}}$$

(c) On peut remarquer que $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AN}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont coplanaires et donc que :

$$\boxed{\text{Le point J appartient au plan (AMN)}}$$

J est donc le point d'intersection du plan (AMN) et de la droite passant par F orthogonalement à ce plan donc :

$$\boxed{\text{J est le projeté orthogonal du point F sur le plan (AMN)}}$$

5. Le volume du tétraèdre AMNF est :

$$\mathscr{V}_{\text{AMNF}} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{\text{AMN}} \times \text{FJ} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{3}$$

Le volume de la pyramide BCGFM est :

$$\mathscr{V}_{\text{BCGFM}} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{\text{BCGF}} \times \text{BM} = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{V}_{\text{AMNF}} = \frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathscr{V}_{\text{BCGFM}} = \frac{1}{3}}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\mathscr{V}_{\text{AMNF}} = 2 \times \mathscr{V}_{\text{BCGFM}}}$$

Exercice 3

Énoncé **(6 points)**

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2\,; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x - 2}$.

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2	$+\infty$
$f(x)$	2 ↗	$+\infty$

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) converge.
3. On appelle ℓ la limite de (u_n).
   On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$.
   Déterminer la valeur de ℓ.
4. On considère la fonction `rang` écrite ci-dessous en langage Python.
   On rappelle que `sqrt(x)` renvoie la racine carrée du nombre `x`.

```
from math import *

def rang(a) :
    u = 6
    n = 0
    while u >= a :
        u = sqrt(3*u - 2)
        n = n + 1
    return n
```

1. Pourquoi peut-on affirmer que `rang(2.000001)` renvoie une valeur ?
2. Pour quelles valeurs du paramètre `a` l'instruction `rang(a)` renvoie-t-elle un résultat ?

Partie B

On admet que la suite (v_n) vérifiant $v_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $v_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{v_n}$ est bien définie.

1. Calculer v_1.
2. Pour tout n entier naturel, on admet que $v_n \neq 2$ et on pose :

$$w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$

   (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme w_0.
   (b) On admet que, pour tout n entier naturel,

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}$$

   En déduire que, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$$

   (c) Calculer la limite de (v_n).
3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n < 2{,}01$ en résolvant l'inéquation.

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, les termes v_n et u_n appartiennent à l'intervalle $]1{,}99\,;\,2{,}01[$.

Correction
Partie A

1. Justifions les trois éléments du tableau :
   - La fonction $x \mapsto 3x - 2$ est une fonction affine croissante sur $[2\,;\,+\infty[$ et la fonction « racine » est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. On en déduit, par composée de fonctions croissantes, que :
   $$\boxed{f \text{ est croissante sur } [2\,;\,+\infty[}$$
   - On a $f(2) = \sqrt{3 \times 2 - 2} = \sqrt{4} = 2$, soit :
   $$\boxed{f(2) = 2}$$
   - On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (3x - 2) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc, par composition de limites :
   $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

2. (a) Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.
   - **Initialisation :**
   Pour $n = 0$, on a $u_0 = 6$ et $u_1 = f(6) = \sqrt{3 \times 6 - 2} = \sqrt{16} = 4$. On a donc bien $2 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 6$. La propriété est vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité :**
   Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$. On a alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur l'intervalle $[2\,;\,6]$:
   $$f(2) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(6)$$
   Soit :
   $$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$
   Et donc a fortiori :
   $$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$$
   La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
   - **Conclusion :**
   La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\boxed{2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6}$$

   (b) D'après la question précédente, la suite (u_n) est :
   - décroissante car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
   - minorée car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.

   On en déduit que :
   $$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

3. Pour tout $x \in [2\,;\,6]$, on a :
$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{3x - 2} = x \\ &\iff 3x - 2 = x^2 \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \end{aligned}$$
   Il s'agit d'une équation du second degré qui admet deux solutions : 1 et 2. Or (u_n) ne peut pas converger vers 1 donc (u_n) converge vers :
   $$\boxed{\ell = 2}$$

4.(a) La commande `rang(2.000001)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n < 2{,}000001$. Comme la suite (u_n) converge vers 2, on sait que cet entier existe et donc que cette commande renvoie bien une valeur.

(b) La suite (u_n) est décroissante et converge vers 2 donc, pour tout $a > 2$, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} < a$. Et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{L'instruction } \texttt{rang(a)} \text{ renvoie un résultat} \iff a > 2}$$

Partie B

1. On a $v_1 = 3 - \dfrac{2}{v_0} = 3 - \dfrac{2}{6} = \dfrac{8}{3}$, soit :

$$\boxed{v_1 = \frac{8}{3}}$$

2.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{v_{n+1} - 1}{v_{n+1} - 2} \\ &= \frac{3 - \frac{2}{v_n} - 1}{3 - \frac{2}{v_n} - 2} \\ &= \frac{2 - \frac{2}{v_n}}{1 - \frac{2}{v_n}} \\ &= \frac{\frac{2v_n - 2}{v_n}}{\frac{v_n - 2}{v_n}} \\ &= \frac{2v_n - 2}{v_n} \times \frac{v_n}{v_n - 2} \\ &= \frac{2v_n - 2}{v_n - 2} \\ &= \frac{2(v_n - 1)}{v_n - 2} \\ &= 2w_n \end{aligned}$$

De plus, $w_0 = \dfrac{v_0 - 1}{v_0 - 2} = \dfrac{6 - 1}{6 - 2} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est géométrique de raison 2 et de premier terme } w_0 = 1{,}25}$$

(b) D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times 2^n$, soit :

$$\boxed{w_n = 1{,}25 \times 2^n}$$

Et comme $w_n - 1 = \dfrac{1}{v_n - 2}$, on a $v_n - 2 = \dfrac{1}{w_n - 1}$ d'où $v_n = 2 + \dfrac{1}{w_n - 1}$, soit :

$$\boxed{v_n = 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}}$$

(c) On a $2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} = 0$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = 2}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} v_n < 2{,}01 &\iff 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} < 2{,}01 \\ &\iff \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} < 0{,}01 \\ &\iff 1{,}25 \times 2^n - 1 > 100 \quad \textit{(car la fonction inverse est décroissante)} \\ &\iff 1{,}25 \times 2^n > 101 \\ &\iff 2^n > 80{,}8 \\ &\iff \ln\left(2^n\right) > \ln(80{,}8) \\ &\iff n\ln(2) > \ln(80{,}8) \\ &\iff n > \frac{\ln(80{,}8)}{\ln(2)} \quad \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(80{,}8)}{\ln(2)} \approx 6{,}3$ donc le plus petit entier naturel n tel que $v_n < 2{,}01$ est :

$$\boxed{n = 7}$$

Partie C

- On a vu, dans la partie B que $v_n \in]1{,}99\,;\,2{,}01[$ pour tout $n \geqslant 7$.
- À l'aide de la calculatrice, on obtient $u_{16} \approx 2{,}012 > 2{,}01$ et $u_{17} \approx 2{,}009 < 2{,}01$ donc $u_n \in]1{,}99\,;\,2{,}01[$ pour tout $n \geqslant 17$.

On en déduit que les termes v_n et u_n appartiennent à l'intervalle $]1{,}99\,;\,2{,}01[$ pour tout $n \geqslant N$ avec :

$$\boxed{N = 17}$$

Exercice 4

Énoncé **(4 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Un musée propose des visites avec ou sans audioguide. Les billets peuvent être achetés en ligne ou directement au guichet.

1. Lorsqu'une personne achète son billet en ligne, un code de validation lui est envoyé par SMS afin qu'elle confirme son achat. Ce code est généré de façon aléatoire et est constitué de 4 chiffres deux à deux distincts, le premier chiffre étant différent de 0.

   Affirmation 1 : Le nombre de codes différents pouvant être générés est 5 040.

2. Une étude a permis de considérer que :
   - la probabilité qu'une personne choisisse l'audioguide sachant qu'elle a acheté son billet en ligne est égale à 0,8 ;
   - la probabilité qu'une personne achète son billet en ligne est égale à 0,7 ;
   - la probabilité qu'une personne opte pour une visite sans audioguide est égale à 0,32.

   Affirmation 2 : La probabilité qu'un visiteur ne prenne pas l'audioguide sachant qu'il a acheté son billet au guichet est supérieure à deux tiers.

3. On choisit au hasard 12 visiteurs de ce musée.
   On suppose que le choix de l'option « audioguide » est indépendant d'un visiteur à l'autre.

   Affirmation 3 : La probabilité qu'exactement la moitié de ces visiteurs opte pour l'audioguide est égale à $924 \times 0{,}2176^6$.

4. Lorsqu'une personne dispose d'un audioguide, elle peut choisir parmi trois parcours :
   - un premier d'une durée de cinquante minutes ;
   - un deuxième d'une durée d'une heure et vingt minutes ;
   - un troisième d'une durée d'une heure et quarante minutes.

   Le temps de parcours peut être modélisé par une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	50 min	1 h 20 min	1 h 40 min
$P(X = x_i)$	0,1	0,6	0,3

   Affirmation 4 : L'espérance de X est 77 minutes.

Correction

1. **Affirmation 1 : Faux**
   Lors de la génération d'un code, il y a 9 possibilités pour le choix du premier chiffre, 9 possibilités pour le choix du deuxième, 8 possibilités pour le choix du troisième et 7 possibilités pour le choix du quatrième. Le nombre de codes différents possibles est donc $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\,536$.

2. **Affirmation 2 : Faux**
   Notons L l'événement « le visiteur achète son billet en ligne » et A l'événement « le visiteur choisit l'audioguide ». D'après l'énoncé, on a $P_L(A) = 0{,}8$, $P(L) = 0{,}7$ et $P(\overline{A}) = 0{,}32$. Il s'agit alors de calculer $P_{\overline{L}}(\overline{A})$:
$$P_{\overline{L}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{L} \cap \overline{A})}{P(\overline{L})}$$
   D'après la formule des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned} P(\overline{L} \cap \overline{A}) &= P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap L) \\ &= P(\overline{A}) - P(L) \times P_L(\overline{a}) \\ &= 0{,}32 - 0{,}7 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}32 - 0{,}14 \\ &= 0{,}18 \end{aligned}$$
   Et donc :
$$P_{\overline{L}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{L} \cap \overline{A})}{P(\overline{L})} = \frac{0{,}18}{0{,}3} = 0{,}6 < \frac{2}{3}$$

3. **Affirmation 3 : Vrai**
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de visiteurs ayant choisi l'audioguide parmi les 12 visiteurs. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0{,}68$. Il s'agit alors de calculer $P(X = 6)$:
$$P(X = 6) = \binom{12}{6} \times 0{,}68^6 \times 0{,}32^6 = 924 \times (0{,}68 \times 0{,}32)^6 = 924 \times 0{,}2176^6$$

4. **Affirmation 4 : Faux**
   L'espérance de X, en minute, est :

$$E(X) = 50 \times 0{,}1 + 80 + 0{,}3 \times 100 = 83$$

   L'espérance de X est donc de 83 minutes.